SISTEMATIZAÇÃO DA ALGEBRA DOS PROCESSOS DE MEDIÇÃO

ANTONIO TADEU F. AMADO*

* Docente nos cursos de Matemática do CCEC e de Engenharia Civil e Produção do CCEAE, na Universidade Católica de Santos.tadeu@unisantos.br

RESUMO:
Todas as Ciências sejam elas físicas, química biológicas e mesmo as humanas ou sociais precisam de *medições quantitativas*. O artigo procura estabelecer os fundamentos formais para a *medição*, sua organização e análise sistemática dos princípios e dos processos racionais e experimentais que se destinam a nortear o trabalho científico, justificando a atribuição dos números aos objetos em termos de sua correspondência estrutural. A ideia fundamental é que as *medições* não são o mesmo que o atributo que está sendo medido. Para os *processos de medição* são necessárias suposições sólidas para fornecer informações significativas sobre a realidade e incentiva as pessoas a pensar sobre o significado de seus dados, encorajando uma análise crítica das suposições por trás dos dados. Ela incentiva a análise de dados do mundo real responsável. A estatística matemática preocupa-se com a conexão entre inferência e dados. A *medição* está preocupada com a conexão entre dados e realidade e aponta para alguns aspectos ligados ao processo de *algebrização* de forma a abordar com mais detalhes o seu contexto de elaboração.

PALAVRAS- CHAVE:
experimento e medição, teoria da medição, grandeza física, álgebra da medição macroscópica e microscópica, observável, instrumentos de medida.

INTRODUÇÃO

Existe uma crença generalizada a partir do séc. XIX que a Ciência como área do conhecimento é necessariamente quantitativa, uma metáfora da construção progressivamente erigida com a coleção organizada de resultados obtidos pelos pesquisadores. Ela não é neutra, ao invés, revela a aceitação da hipótese de que a construção da Ciência está inerentemente provida de fundamentos.

Na verdade, esse quase *corolário* tem origem na tradição galileana e principalmente no famoso dito de William Thomson, 1º Barão de Kelvin, mais conhecido como Lord Kelvin:

> Quando você pode medir aquilo de que fala e expressa-lo em números, você sabe alguma coisa sobre isto. Mas quando você não pode medi-lo, quando você não pode expressá-lo em números, o seu conhecimento é limitado e insatisfatório. Se você não pode medir algo, não pode melhorá-lo. (Thomson, 1889)

Necessariamente todos os meios para estudar o mundo repousam sobre o mesmo fundamento e todos devem ser usados com cuidado pois todos apresentam limitações. Uma *medida* começa com algum *fato físico*. Tão comum é a ideia de que a Ciência necessita de procedimentos quantitativos que estes foram tomados, às vezes, como panaceia para todos os males de que podem padecer as mais diversas investigações.

A cautela é necessária, pois quando temos a *leitura da medida da distância* por exemplo, frequentemente são necessários recursos da Epistemologia e do Método Científico (que foram estabelecido por Galileu Galilei), pois *observar* é próximo de *medir* e termos como *leitura da medida* e *parâmetro* frequentemente necessitam da Epistemologia e do Método Cientifico.

Na verdade, qualquer procedimento que conduza a uma *classificação* por meio de atributos é uma espécie de *mensuração*. Para W. Heisenberg *medir* é realizar *observação*[1]. No entanto as observações não representam obrigatoriamente um sentido epistemológico mais profundo; assim só tem sentido fazer discriminações rigorosas entre *o que se observa* e o que se pode afirmar ter sido *observado* se algo estranho acontece. Podemos considerar *que medir*[2] uma *quantidade* é o que nos leva a uma estimativa numérica de seu valor (HELENE, 1991), pois o modelo matemático de medição, ou seja, aquele que transforma o conjunto de observações repetidas no resultado da *medição*, inclui *várias quantidades* de influência que são conhecidas de forma imediata.

No Brasil (VIM, 2012) usa-se o substantivo *grandeza* ao invés de *quantidade* (*quantity*); e o cálculo de uma *grandeza*, refere-se à aplicação de operações matemáticas de símbolos que representam *grandezas físicas*. No passado, muito tem sido escrito sobre isso e atinge o coração da epistemologia, ou seja, nossa teoria de base do conhecimento da Física. Foi J. C. Maxwell quem introduziu o conceito de *grandeza física* em seu *Treatise on Electricity and Magnetism*, de 1873 (MAXWELL, 1954). Em termos mais amplos, é um processo que permite a utilização de símbolos (os números) para a representação dos conceitos. Em *princípio* os símbolos estariam relacionados entre si da mesma forma pela qual os conceitos se relacionariam.

Em 1887, Helmholtz (1821-1894)[3] publicou os resultados de sua investigação sobre o significado das operações elementares do formalismo matemático da Física. Ele foi inspirado pelo trabalho matemático de H. Grassman (1809-1877) (GRASSMANN, 1861) sobre operações matemáticas com vários objetos na Geometria. Helmholtz identificou o conceito maxwelliano de *valor numérico de uma quantidade física* como um número concreto. Ele descreve os objetos ou *atributos dos objetos* comparando uns com os outros de mesma espécie, permitindo distinguir *grande, igual* ou *pequeno* como *quantidades*. Se esses adjetivos podem ser expressos por um *número concreto*, então podemos denominar como *quantidades*. A multiplicação dessas quantidades com números e a adição de quantidades de mesma espécie estão relacionadas e permitem explicar as bases das combinações físicas ou concatenação dos objetos físicos correspondendo a quantidades de mesma espécie. Então, para Helmholtz, a possibilidade de uma *medida empírica direta* foi considerada como sendo *essencialmente uma propriedade física*. Helmholtz e o matemático Otto Ludwig Hölder (1859-1937) (HÖLDER,

1901) são reconhecidos como os iniciadores do tratamento axiomático do que ficou conhecido por Teoria da Medida ou Análise Dimensional.

As generalizações de Maxwell aplicando as operações matemáticas usuais para as quantidades físicas têm sido aceitas por toda a comunidade científica e muitos consideram que apenas a quantidade física que faz sentido operar como uma quantidade matemática é a componente numérica do valor. Um dos grandes incentivadores das *ideias dimensionais* de Maxwell foi o matemático inglês e primeiro presidente da **Mathematical Association na Inglaterra,** Alfred Lodge (1854 – 1937) (LODGE, 1895) que afirmou:

> As equações da mecânica e da física expressam relações entre as quantidades e são independentes do modo de medição de tais quantidades, da mesma forma como se pode dizer que dois comprimentos são iguais, sem averiguar se estes vão ser medidos em metros ou pés

Essas questões levaram Hermann von Helmholtz a considerar os tipos de provas para testar a hipótese de que *atributos são quantitativos* em sua famosa *análise da medição* argumentou que na Geometria os axiomas não são proposições a priori, mas sim que eles podem ser determinados ou refutados pela experiência. Na mesma linha, em seu ensaio de 1887 intitulado *Zählen und Messen, erkenntnisstheoretisch betrachtet* (von HELMHOLTZ, 1998) ele discutiu os axiomas da aritmética e tentou desvendar o seu conteúdo empírico.

Nesse processo a Matemática desempenha um papel importante e desde a Antiguidade essa *linguagem* começou a manipular esses conceitos envolvendo as noções como *conjuntos, funções* e *relações*, descrevendo construções e relacionamentos entre esses *entes* especiais: *os números*. Embora existam inúmeras razões para considerá-la uma *linguagem*, há de igual maneira outras tantas considerações para não a considerar. Mesmo não sendo uma linguagem, pois contem regras sintáticas sem *conteúdo semântico*, o *conteúdo semântico* é por via das dúvidas sempre encontrado nos vários pontos de contato com outras áreas do conhecimento.

A obtenção de dados com significado e uma intervenção experimental necessária, representam o meio capaz de fazer ressaltar a informação epistemológica relevante e necessária. A grande vantagem é a possibilidade de variar à vontade as circunstâncias e verificar em que *medidas* estas influem sobre o fenômeno (devido ao seu grau de complexidade), isto é, a experiência permite determinar as causas.

É necessária a *linguagem dos conceitos matemáticos* rigorosamente determinada, estruturada a partir de um conjunto de premissas preliminares que possam ser compreendidas de igual modo. Os procedimentos são possíveis porque ao atribuirmos um valor para certa propriedade de um objeto ou de um processo físico; fatos são obtidos exatamente porque o sistema satisfaz certas leis da Natureza, que são as possíveis condições da *pratica da medição*, sendo elas o objeto da atividade teórica. Assim a teoria pode ser denominada *metrização*, ou seja, o estudo das condições de mensurabilidade ou das possíveis condições para a medição ocorrer.

Na *medição* a atribuição de *números* vale também para propriedades particulares, de forma sistemática como uma maneira de representar as propriedades de cada propriedade. *Números* são atribuídos para as propriedades de acordo com um procedimento cuidadosamente prescrito e repetitivo. Os *números* são, portanto, atribuídos de forma sistemática e podem ser de várias formas. Por exemplo, podemos usar os elementos do conjunto $\{1, 2\} \subset \mathbb{N}$ para rotular, por exemplo, as pessoas com cabelo vermelho *1* e as pessoas com cabelo castanho *2*, isso é *uma medição*, uma vez que os números são atribuídos a pessoas de uma forma sistemática e as diferenças entre os escores representam diferenças na propriedade (cor do cabelo)[4]. Um outro exemplo desse fato ocorre com todos nós professores, onde definida escala contida num intervalo de [0,0; *10*,0] as mínimas distinções entre as notas devem ter algum significado. Se for aceito que é possível definir *qualidade de trabalho*, necessariamente somos obrigados a aceitar que uma *nota* não representa a *inteligência do aluno*, mas apenas representa a *medição de qualidade* e dessa forma a diferença de valores de uma nota 4,8 e uma nota 5,0 está impregnada da *aleatoriedade* que afeta a decisão e mostra o quanto é lamentável essa imprecisão para o futuro do aluno.

Uma análise do processo de *medição* é feita mediante *axiomatização* apropriada de certas álgebras, de relações e operações experimentalmente realizáveis. Assim, dada uma *teoria axiomática* de certo processo de *medição* experimental, a tarefa matemática imediata é a de mostrar que os *modelos* da teoria são *isomorfos* a um modelo numérico especial da teoria, esse fato justificaria a associação de *números* aos objetos medidos, não aplicando simplesmente números a coisas.

Neste artigo, vou considerar a partir da *utilidade* que ocorre na atividade científica e tecnológica, levando em conta que a noção de *utilidade* é extremamente efêmera. Será tratada a forma como pode ser construída uma *estrutura algébrica para os processos de medida* partindo do fato e importância que a Matemática desempenha na Ciência da Metrologia; uma vez que os modelos matemáticos são necessários para entender como projetar sistemas de medição eficazes e analisar os resultados que eles produzem, além do que as técnicas matemáticas são usadas para desenvolver e analisar modelos idealizados de fenômenos físicos a serem medidos, e algoritmos matemáticos são necessários para produzir soluções práticas em dispositivos computacionais modernos.

1. ALGEBRA DO PONTO DE VISTA MACROSCÓPICO.

1.1 Instrumentos de medida e elementos funcionais.

Não há nada de novo sobre o *conceito de fazer medições*. Desde a Antiguidade tem sido importante comparar as medições feitas em um lugar ou outro. Claro, isso inicialmente teve muito a ver com troca, troca justa, ou comércio entre as comunidades primitivas. Os pesos iniciais eram simples pedras e partes do corpo, como mãos e braços (o *cúbito*) eram adequados para a maioria das necessidades de medição de comprimento. Mas à medida em que foi crescendo a necessidade de negociar ou de trocar bens, também aumentavam as necessidades das pessoas por maior precisão ou por padrões de referência que não mudavam muito e eram, de alguma forma, *equivalentes*. Uma progressão constante de artefatos básicos para *padrões de referência naturais* representa uma parte de toda a história. As *ciências empíricas* acabaram por replicar o desenvolvimento dos processos na Física permitindo em si mesmas as bases e unificação de suas metodologias.

Do ponto de vista metodológico, a *medição* está ligada à *observação* e *experimentação*. Está ligada à observação devido ao fato de que toda *medição pressupõe alguma propriedade observável do objeto medido*. Este *procedimento empírico* é, ao mesmo tempo, necessário para verificar *valores numéricos* com a ajuda das escalas dos *instrumentos de medição*. A relação com a experimentação é *condicionada* pela estipulação de que a *medida poderia ser concebida como um tipo específico de experimento*.

A concepção de *medição*, como normalmente é concebida no contexto da *medição física*, pode ser ilustrada pelas duas descrições a seguir: i) o desempenho de descrições quantitativas (isto é, experimentos por meio dos quais obtemos dados numéricos que nos permitem encontrar, não apenas o caráter (*qualidade*), mas também a magnitude (*quantidade*) das mudanças observadas; ii) *medir* implica pelo menos três elementos distintos: um sistema físico, sobre a qual vai ser realizada uma determinada operação; uma propriedade observável deste sistema cujo *valor* será determinado por esta operação; e um instrumental por meio do qual a operação será feita.

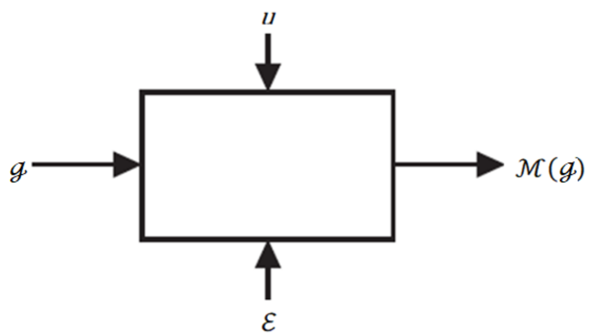
Os constituintes fundamentais da *medição* compreendem então propriedades observáveis (*qualidades*) ou grandezas (*quantidades*) dos objetos medidos e, por outro lado, determinações numericamente objetivas dessas qualidades e quantidades. Toda *observação* deve ser considerada um *processo de interação*, não o mero fato de uma interação em si, mas o suficiente para tornar possível a *observação*. Após a interação ocorrer, o estado do instrumento de medida (equipamento) deve estar *correlacionado* com o estado do sistema *a ser medido*, e tais correlações são estatisticamente gerais, mas limitados nas aproximações, qualquer que seja o grau de exatidão considerado. Logo, num equipamento típico, a *correlação* obtida é tal que cada estado claramente distinto do equipamento, corresponde a variação dos estados possíveis do sistema sob observação. Essa variação é denominada *incerteza de medição*.

Por outro lado, as várias configurações possíveis ou *estados* do *equipamento de medida*, correspondem aos possíveis *resultados das medições*, portanto são considerados como separados completamente e independentemente do fator humano. A *medição* pressupõe uma *descrição da grandeza* que seja comparável com o uso pretendido de um *resultado de medição*, segundo um *procedimento de medição* e com um *equipamento de medição calibrado* (VIM, 2012).

Para a conceituação da álgebra do processo de medição é necessário *generalizar para qualquer caso* a descrição do *equipamento de medida*. As *informações* são obtidas a partir da interação do sistema de interesse com o equipamento de medida. Assim qualquer dos objetos cujas propriedades são compreendidas mesmo que em parte, pode em princípio ser utilizado na construção do equipamento de observação, uma vez que nem todos são construídos pela mão humana podem não ser localizados em laboratório (BOHM, cap. 22, 1989).

O *equipamento* ou *instrumento de medida* e, em geral, instrumentos científicos, produzem leituras quando aplicados a sistemas físicos. O instrumento de medição *define* uma *magnitude física*. Assim, quando dois instrumentos diferentes (ou métodos) são aplicados ao mesmo objeto, podem produzir resultados diferentes, porque eles não estão medindo a mesma propriedade. Os dispositivos de medição não são instrumentos feitos às cegas; sendo possível analisar e testar instrumentos de medição levando em conta que *não existe uma teoria geral de instrumentos de medição* e uma *teoria geral de erros sistemáticos* que possam ser úteis na vida real. O processo experimental então caracteriza a *medição*, ou seja, *a obtenção de um ou mais valores que podem ser razoavelmente atribuídos a uma grandeza* física. Assim, esquematizando em um diagrama, a estrutura lógica do instrumento de medida:

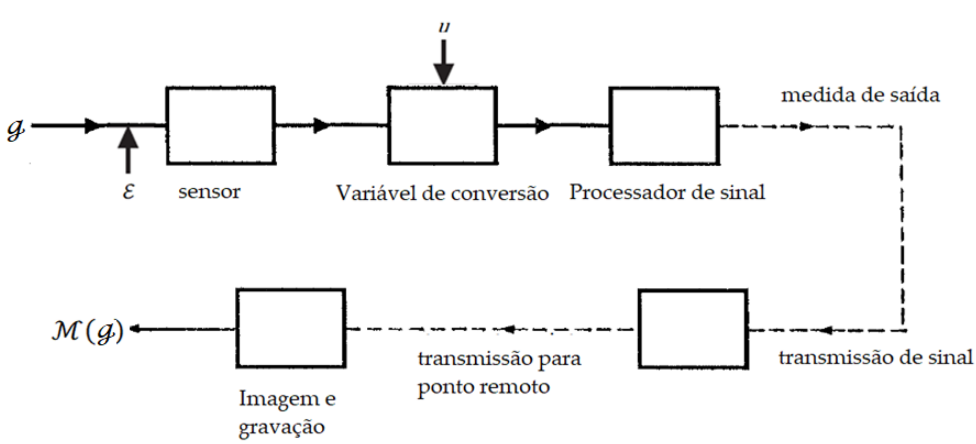
Seja a *grandeza* g comparada com uma *unidade u* cujo resultado do processo de medição será *X*, frequentemente transformado no valor *Y de uma quantidade de saída de fácil leitura*, M(g) (por exemplo, o deslocamento de um indicador de índice num mostrador).



No diagrama apresentado, a grandeza E representa a *energia* que em muitos casos alimenta o instrumento. Alguns instrumentos têm uma estrutura lógica simples, em que a grandeza g é diretamente comparada com a unidade padrão *u*. Como padrão, entende-se um valor aprovado por um organismo internacional reconhecido[5] que provê, pelo uso comum e repetitivo.

Por exemplo, uma *régua* para medir comprimentos, a *grandeza* de entrada g é o comprimento a ser medido; a *unidade u* (tipicamente o milímetro) e seus múltiplos estão registrados (gravados) na régua. A *medida* $M(g) = X(g)$ é lida diretamente na régua. Na grande maioria dos instrumentos que tem estrutura lógica mais complexa (envolvendo elementos como sensores de entrada e saída, transdutores e amplificadores), a comparação com a unidade de medida é feita após uma *calibração,* que é feita pelo fabricante (no caso de instrumentos conhecidos como *absolutos*, por exemplo como o paquímetro, o micrômetro e o goniômetro). A quantidade g também pode representar várias situações, manipulações e transformações para outras quantidades. Um exemplo desse fato é o *termômetro de mercúrio* onde a a *grandeza* de entrada g é a *temperatura* do ambiente externo, mas a *medida* $M(g) = H\ (g)$ é a altura da coluna de mercúrio, lida diretamente numa escala.

Os *instrumentos* ou *equipamentos* podem ser divididos em função do desempenho na *medida das grandezas físicas* que são constantes no tempo ou variáveis no tempo, envolvendo a *precisão do instrumento*. Podem ser classificados em função de suas propriedades de operação, instrumentos *absolutos* e *diferenciais*, analógicos e digitais, com mostradores (*displaying*) e processadores.



Elementos do instrumento de medida

Um dado *instrumento de medida* ou sistema de medição com *incerteza instrumental* especificada, define um conjunto de valores de *grandezas do mesmo tipo* que podem ser medidos (VIM, 2012); ou seja, um intervalo de valores X da grandeza de entrada g dentro do qual o instrumento opera num grau específico de precisão. É chamado de *intervalo de medição*.

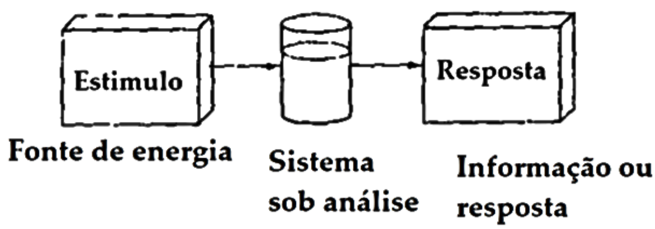
intervalo de medição = condição de trabalho ~ intervalo de medida

O limite superior do intervalo corresponde ao valor máximo da *grandeza* de entrada que pode ser fornecida sem danificar o instrumento. Em alguns instrumentos, a faixa pode ser variada por meio de seletores adequados. Como exemplo, um instrumento simples que todos conhecem, o termômetro de mercúrio, o *intervalo de medição* é definido pelos valores mínimo e máximo da escala [*-10*^{0} C; *+60*^{0} C]. O *limite superior* geralmente também é o *limite de segurança*, pois usá-lo para medir temperaturas mais altas pode causar a quebra do termômetro.

Se esse mesmo termômetro for colocado numa sala e a sua leitura mostrar uma temperatura de *+20*^{0} C, então não interessa se a verdadeira temperatura da sala é de *19,5*^{0} C ou *20,5*^{0} C. Essas pequenas variações em torno de *20*^{0} C são muito pequenas para afetar nossos órgãos sensores (o tato, no caso), porque não *percebemos tal variação*. Nossos corpos não têm *sensibilidade* suficiente para discriminar entre tais níveis próximos de temperatura e, portanto, se o tal termômetro apresentar uma imprecisão de leitura de [*-0,5*^{0} C; *+0,5*^{0} C] ele ainda é perfeitamente adequado. Mas se tivéssemos que medir a temperatura para processos químicos, no entanto, esse intervalo teria um efeito significativo na taxa de reação ou mesmo nos produtos de um processo. Por conseguinte, fica claro que é necessário um intervalo de *imprecisão de medição* muito inferior [*-0,5*^{0} C; *+0,5*^{0} C].

A *precisão* da medição é uma das considerações na escolha do instrumento de medição para uma aplicação específica. Outros parâmetros como *sensibilidade*, *linearidade* tem uma importância que vai além de sua conceituação[6]; representando a ação da obtenção de *informação* no processo de medição a reação

$$H(\mathcal{G}) = \frac{valor\ de\ saída\ \Delta Y(\mathcal{G})}{valor\ de\ entrada \Delta X(\mathcal{G})} \equiv \frac{variação\ na\ escala}{valor\ da\ medida} = \frac{\Delta E_{estímulos\ externos}}{E_{sistema}}$$ [1]



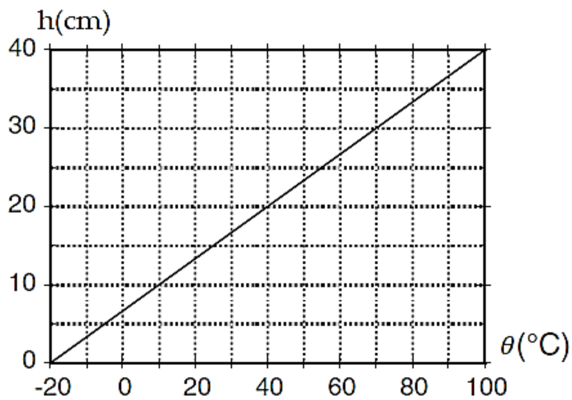
[1] $H(\mathcal{G})$ é denominada *função de transferência*.

As alterações de temperatura ambiente e umidade relativa do ar são outras considerações importantes. Esses atributos são conhecidos como *características estáticas dos instrumentos* e são especificadas pelo fabricante para instrumentos utilizados para medição de *grandezas físicas* não variáveis com o tempo. A *resposta característica* é uma relação entre um *estímulo* e a *resposta correspondente*, sob condições definidas.

Por exemplo, num termômetro cuja substância termométrica é o mercúrio, o coeficiente *H* é dado pela relação entre a variação da *altura* da coluna de mercúrio e a variação da *temperatura*

$$H(\mathscr{g}) = \frac{\Delta h}{\Delta \theta}$$

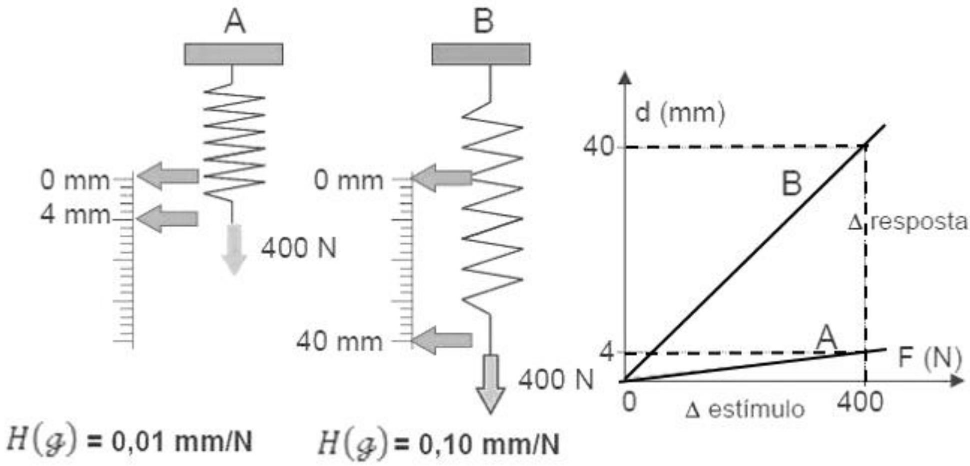
Esse valor é numericamente igual ao *coeficiente angular* da linha reta obtida no gráfico da altura h pela temperatura θ.



Isso significa (DOEBELIN,MANIK, 2007, p.37) que a *sensibilidade* e a *linearidade* (a relação entre os valores *resposta* $\mathrm{Y}(\mathscr{g})$ e os valores $\mathrm{X}(\mathscr{g})$ de *estímulo*) estão relacionados entre si. Matematicamente a relação direta de proporcionalidade pode ser assim explicitada

$$a_0 Y = b_0 X \Leftrightarrow Y(\mathscr{g}) = \frac{b_0}{a_0} X(\mathscr{g}), com\ a_0, b_0 \in \mathbb{R}$$

$$Y(\mathscr{g}) = H(\mathscr{g}).X(\mathscr{g})$$



Para o caso de $H(g)$=const a *sensibilidade* é estática, significa que a resposta do instrumento é instantânea; são denominados *linear de ordem zero*, notadamente ideal para medidas de *grandezas* constantes com o tempo. Para o caso em que a *grandeza física* é função do tempo, $g(t)$, implica que $X(g(t))= X(t)$ e $Y(g(t))= Y(t)$, a relação entre os valores de *entrada* (estímulo) e *saída* (resposta) são descritos por uma equação diferencial de *primeira ordem*

$$a_1\dot{Y}(t) + a_0Y(t) = b_0X(t), com\ a_1, a_0, b_0 \in \mathbb{R}$$

Isso significa que $Y(t)$ não representa instantaneamente os valores de $X(t)$. Instrumentos com resposta desse tipo são denominados de *primeira ordem*. A presença de na equação mostra que os valores de $Y(t)$ não seguem as variações de $X(t)$, pois somente a variação inicial vai refletir nesse primeiro termo da equação.

Nos instrumentos de *segunda ordem*, as relações entre $Y(t)$ e $X(t)$ são descritas por uma equação diferencial de segunda ordem na forma

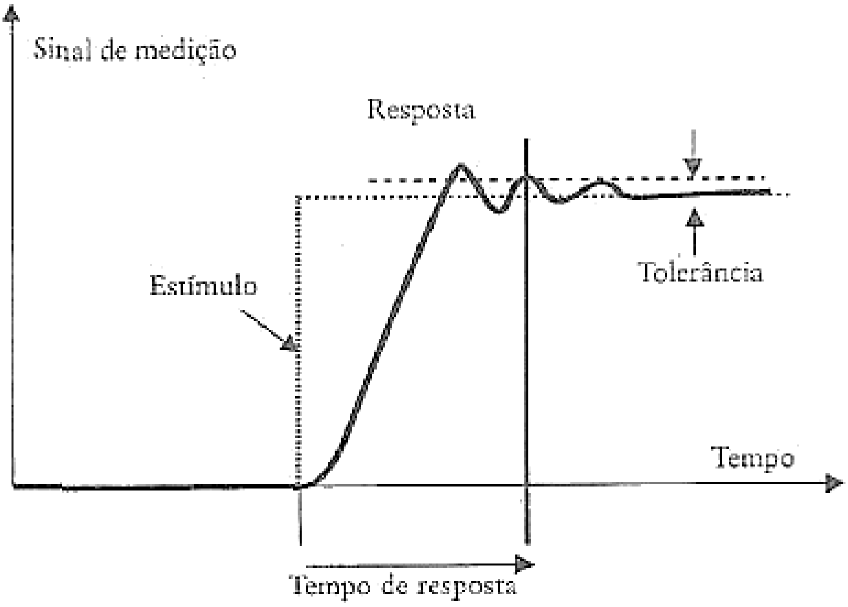
$$a_2\ddot{Y}(t) + a_1\dot{Y}(t) + a_0Y(t) = b_0X(t), com\ a_2, a_1, a_0, b_0 \in \mathbb{R}$$

Em geral, o modelo matemático de muitos instrumentos consiste em uma equação diferencial linear a coeficientes constantes, cuja ordem representa a *ordem do instrumento*

$$a_nY^{(n)}(t) + a_{n-1}Y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1\dot{Y}(t) + a_0Y(t) = b_nX^{(n)}(t) + \cdots + b_0X(t)$$

Os coeficientes a_i e b_j, para $i=1, 2, \ldots n$ e $j=1, 2, \ldots m$, todos reais.

Finalmente, uma importante informação que deve ser obtida nos instrumentos antes de qualquer processo de *medição* é o *tempo de resposta*, que pode ser descrito como o *tempo necessário para que um instrumento responda a uma mudança no sinal de entrada*, ou seja, é o intervalo entre o instante em que o estímulo (*valor de entrada* de um instrumento de medição ou um sistema de medição) é submetido a uma variação brusca entre dois valores constantes especificados e o instante em que a indicação correspondente se mantém entre limites especificados em torno do seu valor final em regime estável.



No caso de medições automáticas, o tempo de resposta pode ser um fator limitante para o número máximo de leituras que podem ser tomadas por segundo. O *tempo de resposta* é afetado por muitos fatores, como *tempo* de reação (percepção visual até a resposta muscular), tempo de conversão analógico-digital, tempo de estabilização, atrasos nos componentes eletrônicos e atrasos nos sensores.

Essa pequena revisão abrangeu as características típicas e gerais de qualquer *instrumento de medi*ção, mostrando as muitas questões envolvidas na execução da implementação que podem influenciar no desempenho geral do processo de *medição* e implicações na *imprecisão* das medidas.

1.2 Definições e conceitos.

Uma pergunta é inevitável: O *que pode ser mensurado?* A resposta está intimamente ligada ao que é realmente *medição*. Esse é um daqueles conceitos que parecem simples à primeira vista, mas quando submetidos a uma análise mais cuidadosa revelam aspectos surpreendentes. Outros conceitos são o de *medição* e *medida*. Etimologicamente, medir vem do latim *metíri*[7], que significa comparação com uma medida convencional previamente aceita.

Definição 1.

Medição é o processo de obtenção experimental de um ou mais valores que podem ser razoavelmente atribuídos a uma grandeza, não se aplicando a propriedades qualitativa (VIM, 2012).

O conceito de *medição* foi apresentado pela primeira vez no Livro V dos Elementos de Euclides, escrito cerca de 300 a.C., mas é atribuído a Eudoxo. Nele são definidos os conceitos centrais da *magnitude* e *relação*, além de explicar o *lugar dos* números na medição. Esta explicação foi aceita como padrão por mais de 2.000 anos.

Os antigos gregos dividiam *grandezas* na multiplicidade (ou *quantidades discretas)* e magnitude (ou *quantidade contínua*). A *medida de uma grandeza* era determinada em relação ao número de unidades apropriadamente definidas[8]. Isto colocava um problema, pois sabe-se que as magnitudes poderiam ser mutuamente incomensuráveis (duas grandezas são mutuamente incomensuráveis *se e somente se* a razão de um em relação ao outro não pode ser expressa como uma razão de números inteiros, por exemplo, como é o caso dos comprimentos da aresta e diagonal de um quadrado, cujo valor é dado por um *número irracional*).

O problema para Euclides era explicar o seu *conceito discreto* de medida aplicado a *magnitudes contínuas*. Isso foi resolvido através da liberalização do conceito de *medida* ao estabelecer que para cada grandeza específica (por exemplo, cada comprimento específico) existe uma série de múltiplos dessa magnitude. Definido desta maneira, a relação existente entre cada magnitude e qualquer unidade arbitrária, quer incomensurável ou não, em princípio, é uma razão que pode ser calculada. Esta seria a *primitiva teoria algébrica da medição*.

É claro, a menos que haja alguma *operação física* para a obtenção de grandezas múltiplas, não é possível calcular essas proporções. Portanto, esta solução elegante e poderosa não foi aplicada para além da gama de magnitudes extensivas (isto é, aquelas em que uma operação de adição pode ser definida). Classicamente isso incluía apenas as magnitudes geométricas, peso e tempo, uma especialidade dos pensadores gregos.

Devemos cuidadosamente distinguir o processo de *metrização* do objeto e a teoria que resulta dessa atividade de *medição*, afim de clarificar conceitos, discussões metodológicas que ocorrem na Psicologia, Sociologia e no Estudo da Política que são frequentemente prejudicados por confusões como aquelas envolvendo a *quantificação* (quantificação numérica) e medição, *magnitude* (quantidade) e escala e *objetivador* (indexação) com definição operacional. Um outro tipo de confusão é causado pela metodologia obsoleta da física (onde é originária). Os conceitos *quantitativos* são algumas vezes denominados de *quantificação* ou precisamente *quantificação numérica* que é uma operação lógica, puramente conceitual. *Quantificar* é uma concepção cômoda dos cientistas envolvidos na construção de uma teoria da quantificação; portanto é diferente de *medir,* que é uma operação empírica.

Como cientificamente qualquer *evento natural* ou um *fenômeno* é necessariamente *observável*, por mais comum que seja, exige o uso de instrumentação para observar, registrar ou compilar dados relativos a ele, portanto *medir*.

Definição 2.

Os atos naturais ou ocorrências naturais, cientificamente são chamados fenômenos. Fenômeno é o aspecto que as coisas oferecem aos nossos sentidos; o primeiro contato que temos com as coisas, o que aprendemos como experiência.

A precisão com que são observadas as regularidades ou padrões de um tipo num certo fenômeno, permite sob o aspecto estrutural, entendermos como sendo uma lei natural. As leis naturais que regulam um conjunto de fenômenos são por sua vez reunidas em uma teoria.

Definição 3.

Um evento é um fenômeno observável, identificado como a menor parte de um processo, a menor parte de uma mudança.

A parte do seu uso generalizado como termo filosófico, um fenômeno representa qualquer *evento observável* possível de ser *medido com algum instrumento*. O trabalho de muitas gerações demonstrou a existência da ordem e regularidade nos fenômenos naturais, verificando-se que na Natureza, certos aspectos dos fenômenos são reproduzidos sempre e o aparecimento de uns é acompanhado necessariamente por outros.

A *medida* pode ser descrita então como um *mapeamento* de elementos pertencentes a um *conjunto de dados empíricos* cuja *transformação particular* (o processo de medição) leva aos *elementos de um conjunto abstrato das imagens* (o conjunto de fontes e o conjunto de imagens são *isomórficos* se a transformação copiar a estrutura do conjunto de dados). O *isomorfismo* é o conceito matemático importante, permitindo usar essas concepções algébricas elementares para conceituar o que temos necessidade, mesmo de forma intuitiva.

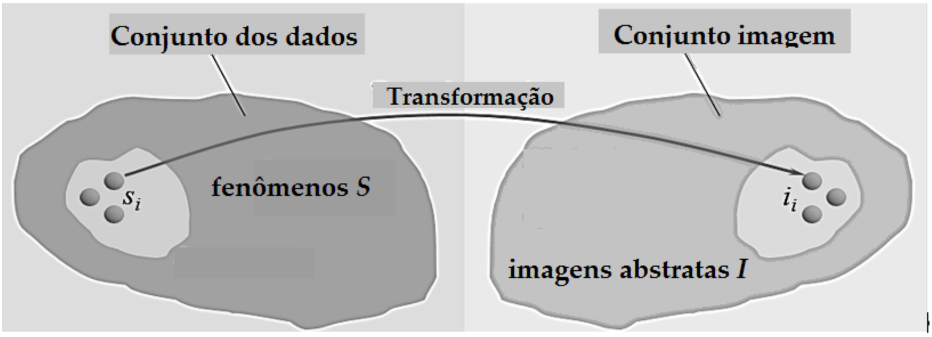
Teorema 1.

Dois conjuntos: $\mathbb{D}$, *o conjunto dos dados e* $\mathbb{M}$, *o conjunto das medidas, são isomorfos* $\Leftrightarrow$

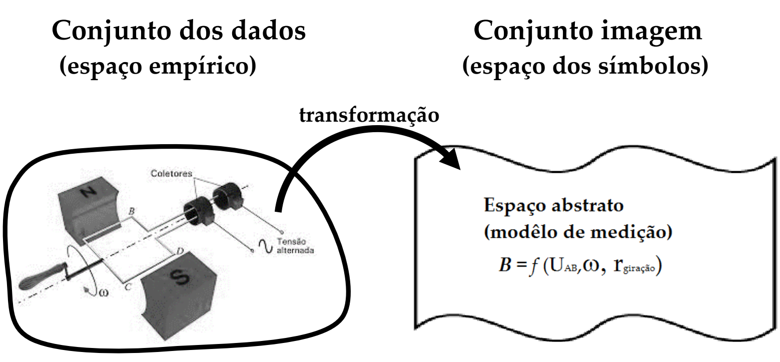
i) *existe uma correspondência biunívoca entre* $\mathbb{D}$ e $\mathbb{M}$;

ii) *quaisquer relações e operações definidas nos conjuntos são preservados pela correspondência*.

A condição (i) associa dois conjuntos $\mathbb{D}$ (conjunto dos dados) e $\mathbb{M}$ (conjunto imagem ou das medidas), a (ii) estabelece uma correspondência *um a um* entre os elementos seus elementos.



Como exemplo concreto



É a noção de *isomorfismo* que nos ajuda a compreender a concepção de *mensuração* ou *medição*, uma vez que um dos objetivos primordiais é o de mostrar como se pode passar de *observações qualitativas* para *asserções quantitativas*. A análise deve ser feita mediante a axiomatização de certas álgebras *de relações e operações experimentalmente realizáveis*. A Matemática tem a tarefa de mostrar que os *modelos da teoria são isomórficos a um modelo numérico especial da teoria*, justificando assim a associação de números aos objetos medidos e não uma simples apropriação numérica das coisas (HEGENBERG, p.77, 1976).

Faltando os meios para identificar o *isomorfismo,* são necessários critérios menos rigorosos para associar símbolos e conceitos, pois como a quantificação é um aspecto essencial da *mensuração*, a associação é permitida sem que as *condições rígidas de mensuração* sejam satisfeitas e como é fácil perceber, essa *quantificação* nem sempre é frutífera. De qualquer maneira sua importância reside no fato que permite melhor caracterização de certos conceitos, leva com frequência a descrições precisas que seriam impraticáveis sem a *quantificação* (um exemplo claro é o emprego da noção de velocidade de informação), conduzindo em geral a um conjunto de classificações mais acuradas contribuindo decisivamente para a formulação de hipóteses, estabelecendo nexo entre as variáveis associadas ao problema e a descrição matemática e finalmente, permite o confronto de teorias rivais. O que temos que ter em mente é que sempre é necessário dispor os conceitos antes de associar-lhes números.

Matematicamente a noção e o significado de *medida* estão envolvidos com o que se poderia chamar de *dimensão* de um conjunto. Em Física, a *medida,* embora seja uma noção intimamente relacionada com a correspondente noção em Matemática, difere, contudo, por sempre estar associada com alguma *quantidade*. Não confundir, *grandeza* (já discutido acima) com *dimensão*, já que existem quantidades que são adimensionais. A condição de observabilidade, no entanto implica numa dependência das medições realizadas por *diferentes observadores*, diferindo matematicamente segundo o grau de movimento ou orientação. Se a *observação* e sua correta compreensão é crucial, é necessário estar ciente de que a *observação* tem uma relação íntima com o *observador*, o qual oferece as conclusões das *observações*.

Definição 4.

Observador é a descrição matemática de um ente (sujeito ou estrutura) associado a um sistema de referência; capaz de realizar medições de uma dada grandeza física para obter informações sobre o estado do sistema físico.

O observador é um *sujeito cognitivo* com todo seu equipamento psíquico. É bem comum considerar a *medida* como uma interação entre o que é *observável* e o *observador*, ou ainda, uma síntese dos dois.

Assim a atribuição de *números* a objetos indistintamente com a finalidade de representar as suas propriedades, e não qualquer propriedade, mas apenas as propriedades específicas chamadas *magnitudes* ou *grandezas*, que são capazes de *instanciação*[9] *mais ou menos*, ou seja, de *instanciação em grau*. *Magnitude* e a palavra *grandeza* são ambíguas. Às vezes, elas são usadas para se referirem as propriedades que estamos *medindo* no objeto. Em outras vezes, para se referir à *grandeza específica* da propriedade que o objeto tem, isto é, o valor da *medição*. Não há nenhum uso padrão na literatura de *medição* a ser seguido. Usando como sinônimos, quando for necessário para se referir a ambos os sentidos que tendem a usar *magnitude* para o primeiro, ou seja, a própria propriedade e *quantidade* para o segundo.

Se entendermos por esse princípio que a *medição* é um processo ou o resultado da determinação da razão de uma *grandeza* física e a unidade de medida, então a *medição* é na verdade um *operacionalismo*, que é parte da grande corrente do empirismo moderno que inclui o pragmatismo e o positivismo lógico (MARTINS, 1982). O *operacionalismo* é uma espécie de *credo* *ortodoxo* e todo desvio a seu respeito levará a uma punição; um *credo* onde dois dos *dogmas* desse credo são (BUNGE, 1973, p.12):

I. *A observação é a fonte e a função do conhecimento físico;*

II. *Nada é real a menos que se torne parte da experiência humana. A totalidade da física diz respeito à experiência mais do que a uma realidade independente; por isso a física é uma área da experiência humana.*

Se a *observação* é a fonte e objeto do conhecimento físico, Bunge (1973, p.13) considera que ela deve proporcionar apenas *algum conhecimento rudimentar*; sendo que, mesmo o conhecimento comum vai muito além da observação quando postula a existência de *entidades* inobserváveis, reconhecendo que na Física, é comum avançar em ideias sobre o que não é possível extrair da experiência comum. Para ele é falso que a *observação* seja a origem de todos os itens do conhecimento físico, uma vez que a *observação*, vista como *ato* não é pertinente a Física, mas a Psicologia. Mas mesmo não sendo a origem de todos os itens do conhecimento físico, é a forma necessária de “perceber o mundo” através dos sentidos; constituindo um ato que resulta na estimativa de valor de uma propriedade ou regularidade, envolvendo a aplicação de um procedimento específico.

Dessa forma, o que *medimos* é um atributo, característica mensurável, *quantidade ou magnitude* capaz de descrever uma *grandeza* que seja compatível com o uso pretendido do resultado da *medição*, o *mensurando*. O *mensurando* representa a quantidade medida, ou seja, é a quantidade específica sujeita a *medição*. A *medição* é a atribuição de *números* às propriedades dos objetos ou eventos no mundo real, um processo de atribuição de números para representar qualidades por meio de uma operação objetivamente empírica (FINKELSTEIN, LEANING, 1984); incluindo o *sistema de medição* e as condições sob as quais ela é realizada, podendo modificar o fenômeno, o corpo ou a substância de modo que a *grandeza* que está sendo medida pode diferir do *mensurando* como ele foi definido.

Definição 5.

Uma grandeza física g é a propriedade de um fenômeno ou de um corpo ou de uma substância que pode ser expressa quantitativamente sob a forma de um número e de uma referência (VIM, 2012).

As *grandezas físicas* como conceito são atribuições dadas aos eventos e fenômenos físicos, não são os fenômenos físicos propriamente ditos, mas um modelo matemático que representa esses fenômenos (DE BOER, 1995).

Definição 6[10].

Uma medida é um número puro $M \in \mathbb{R}$, e a expressão completa de uma grandeza física será o produto de dois fatores: a unidade de medida e o número de vezes que essa unidade é utilizada[11].

Dada a *grandeza física* g, a *medida* $M(g)$ será dada por

Grandeza física = valor numérico x unidade

$$(1) \quad g = \{M(g)\}.u$$

onde $\mathcal{G} \in$ R é seu valor numérico. Portanto *medir é um ato de comparar quantidades.*

$$M(g) = \frac{g}{u}$$

A eq.1 estabelece é uma representação matemática da *medida*, mas expõe os fatores experimentais que podem influenciar o processo de *medição*. Raramente a *grandeza* física g corresponde a um múltiplo de n.u, para $n \in \mathbb{Z}^+$. Em geral a *medida* $M(g) \notin \mathbb{Z}^+$, assim se a *unidade* u for supostamente divisível em submúltiplos, pode-se supor que a medida $M(g) \in \mathbb{Q}$, portanto da forma p/q. Como consequência a *medid*a da *grandeza física* $M(g) \in \mathbb{R}$.

Definição 7 (VIM, 2012).

Unidade de medida é uma grandeza escalar real, definida e adotada por convenção, com a qual qualquer outra grandeza da mesma natureza pode ser comparada para expressar, na forma dum número, a razão entre as duas grandezas.

Corolário 1 (VIM, 2012).

As unidades de medida são designadas por nomes e símbolos atribuídos por convenção.

Corolário 2 (VIM, 2012).

As unidades de medida das grandezas da mesma dimensão podem ser designadas pelos mesmos nome e símbolo, ainda que as grandezas não sejam da mesma natureza.

Corolário 3 (VIM, 2012).

As unidades de medida de grandezas adimensionais são números, para alguns casos recebem denominações especiais a estas unidades de medida.

As *grandezas físicas* são, portanto, consideradas o objeto natural usado para expressar os resultados das medições, as leis e relações teóricas. Como conceito são atribuídas aos eventos e fenômenos físicos, não sendo os fenômenos físicos propriamente ditos, mas um modelo matemático que representa esses fenômenos (DE BOER, 1995)

Ainda como consequência dessa definição, lembro que Maxwell escreveu que a *unidade* também pode ser concebida como uma *grandeza*, isto é, uma *grandeza* do mesmo tipo que a *grandeza a ser expressa*, mas selecionada como um padrão de referência; *unidades são grandezas particulares* especialmente selecionadas e usadas para permitir a expressão de outras *grandezas do mesmo tipo* de maneira quantitativa: *a escolha das unidades possibilita a medição das grandezas físicas*.

As grandezas físicas formam um conjunto $\mathbb{G} \subset \mathbb{R}$ o qual satisfaz duas operações, *adição* e *multiplicação*. Também em $\mathbb{G}$ está definida uma relação que permite comparar seus elementos, a relação *menor ou igual* $\leq$. Satisfaz os seguintes axiomas para a *adição* (MILIES,COELHO, 2001):

A_1 – Lei Associativa: *Para toda terna* a, b *e* $c \in \mathbb{G}$, *então vale*

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

A_2 – Elemento Neutro: *Existe um único elemento denominado neutro aditivo ou zero, tal que*:

$$a + 0 = a, \forall\, a \in \mathbb{G}$$

A_3 – Existência do Oposto: *Para toda grandeza física* a *existe um único elemento que é denominado oposto de* a e será indicado por $(-a)$ tal que

$$a + (-a) = 0$$

A_4 – Lei Comutativa. *Para todo par* a, b *de grandezas físicas vale*:

$$a + b = b + a$$

Para a *multiplicação*:

A_5 – Lei Associativa: *Para toda terna* a, b *e* $c \in \mathbb{G}$

$$a(bc) = (ab)c$$

A_6 – Elemento Neutro: *Existe um único elemento denominado neutro multiplicativo, indicado por* 1, *tal que*:

$$1.a = a, \forall\, a \in \mathbb{G}$$

A_7 – Lei Cancelativa: *Para toda terna* a, b *e* $c \in \mathbb{G}$, *com* $a \neq 0$, *tem-se*

$$ab = ac \Longrightarrow b = c$$

A_8 – Lei Comutativa. *Para todo par* a, b *de grandezas físicas vale*:

$$ab = ba$$

A_9 –Lei Distributiva. *Para toda terna* a, b *e* c *de grandezas físicas vale*:

$$a(b + c) = ab + ac$$

Axioma 1.

O conjunto $\mathbb{G}$ das grandezas físicas munido de A_8, caracteriza um semi- grupo.

Definição 8.

Grandezas físicas cujos valores dependem de escalas aceitas em um sistema de unidades de medida são denominadas dimensionais ou grandezas concretas e grandezas cujos valores independem do sistema de unidades aplicado são denominadas adimensionais ou quantidades abstratas.

Definição 9.

O valor numérico do produto de duas ou mais grandezas é o produto dos valores numéricos das duas ou mais grandezas.

Sejam $\mathscr{a}$ e $\mathscr{b}$ duas *grandezas físicas*. Da Def.6, eq.1

$$\mathscr{g} = \{M(\mathscr{g})\}.u$$

$$(2) \quad a.\mathscr{b} = c \Longrightarrow \{M(a)\}.u_a.\{M(\mathscr{b})\}.u_b = \{M(c)\}.u_c$$

Para um *sistema de unidades coerentes*[12] as equações entre as *unidades* nunca contêm fatores numéricos

$$(3) \; u_a.u_b = u_c$$

Dando assim a equação dos valores numéricos

$$(4) \; \{M(a)\}.\{M(\mathscr{b})\} = \{M(c)\}$$

Axioma 2.

Seja $\mathbb{G}$ um conjunto não vazio das grandezas físicas e $\mathscr{v}, \mathscr{w} \in \mathbb{G}$; existe um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que:

a) $(\alpha.\mathscr{v}).\mathscr{w} = \mathscr{v}.(\alpha.\mathscr{w})$;

b) $\exists\, \beta \in \mathbb{R} \,/\, (\alpha.\beta).\mathscr{v} = \alpha.(\beta.\mathscr{v})$.

Dado o conjunto das *grandezas físicas* $\mathbb{G}$, denomina-se por *R* uma *relação* em $\mathbb{G}$ para indicar que dois elementos $\mathscr{g}$ e $\mathscr{h} \in \mathbb{G}$ estão *R relacionados*: $(\mathscr{g}R\mathscr{h})$. Uma *relação R* tal que para todo $\mathscr{g} \in \mathbb{G}$ vale $(\mathscr{g}R\mathscr{g})$ diz-se *reflexiva.* Uma relação *R* tal que para todo par de elementos $\mathscr{g}, h \in \mathbb{G}$, então se $(\mathscr{g}R\mathscr{h})$ vale e $(\mathscr{h}R\mathscr{g})$ também vale; a *relação* é denominada *simétrica*. Por outro lado, a *relação R* se diz *transitiva* se para a terna $\mathscr{g}, \mathscr{h}, \ell \in \mathbb{G}$ vale $(\mathscr{g}R\mathscr{h}), (\mathscr{h}R\,\ell) \Longrightarrow (\mathscr{g}R\,\ell)$.

Nos *processos de medição* no dia a dia surgem *relações* entre os elementos de um conjunto ou entre elementos de conjuntos distintos. Um exemplo comum é o conjunto dos dados $\mathbb{D}$ e o conjunto imagem ou das medidas $\mathbb{M}$. Das tantas situações existentes em um *processo de medição* decorre naturalmente uma ideia informal de *relação*: é um sistema *R* constituído de: a) conjunto $\mathbb{D}$ (partida), b) conjunto $\mathbb{M}$ (chegada), c) uma sentença $p(d, m)$, onde $d \in \mathbb{D}$ e $m \in \mathbb{M}$ então para todo *par ordenado* $(d, m) \in \mathbb{D}\mathrm{x}\mathbb{M}$. a proposição $p(d, m)$ é verdadeira ou falsa. Aproveitando essa notação, pode-se definir então a *relação binária.*

Definição 10.

Chama-se relação binária R de $\mathbb{D}$ em $\mathbb{M}$, ao subconjunto $\mathfrak{R} \subset \mathbb{D}$ x $\mathbb{M}$.

Então, se $(d, m) \in \mathfrak{R}$ usa-se dRm; se $(d, m) \notin \mathfrak{R}$ usa-se dRm.

Teorema 4.

Uma relação binária R num conjunto $\mathbb{G}$ não vazio, é chamada relação de equivalência e indicada por $\sim$ se para qualquer $\mathscr{g}, \mathscr{h}, \ell \in \mathbb{G}$ o conjunto das grandezas físicas, satisfaz as propriedades

P_1 *reflexiva*: se $\mathscr{g} \in \mathbb{G}$, então $\mathscr{g} \sim \mathscr{g}$;

P_2 *simétrica*: se $g, h \in \mathbb{G}$, então $g \sim h$ e $h \sim g$;

P_3 *transitiva*: se $g, h, \ell \in \mathbb{G}$ e $g \sim h$ e $h \sim \ell \therefore g \sim \ell$.

Definição 11.

Seja o conjunto $\mathbb{G}$ e $\sim$ uma relação de equivalência em $\mathbb{G}$; então, para cada elemento $g \in \mathbb{G}$, chama-se classe de equivalência de g o conjunto dado por:

$$(5)\ \ \mathbb{C}(g) = \{\forall\ \ h \in \mathbb{G} / \ h \sim g\}$$

Corolário 1.

O conjunto das classes de equivalência efetuam uma partição nas classes de equivalência de todo o conjunto das grandezas físicas $\mathbb{G}$:

$$(6)\ \ \mathbb{G} = \{\mathbb{C}(g), \mathbb{C}(h), \mathbb{C}(\ell), , \dots\}$$

Numa *classe de equivalência* todas as *grandezas* são da mesma espécie e, portanto, as operações adição e subtração tem significado físico.

Teorema 5.

Dada uma decomposição de $\mathbb{G}$ como união de subconjuntos mutuamente disjuntos não vazios, define-se uma relação de equivalência em $\mathbb{G}$ cujas classes sejam precisamente os sub- conjuntos dados.

Da Def.10, se

a) $g \in \mathbb{C}(g)$

b) $h \in \mathbb{C}(g)$ então $\mathbb{C}(h) \equiv \mathbb{C}(g)$

c) se $\mathbb{C}(g) \cap \mathbb{C}(h) \equiv \varnothing \Longrightarrow \mathbb{C}(g) = \mathbb{C}(h)$

De (a) tem-se $g \sim g$. Se $\sim$ é a *relação de equivalência* em $\mathbb{G}$, define para cada $g \in \mathbb{G}$ a *partição*

$$(7)\ \ P_g = \mathbb{C}(g) = \{\forall\ h \in \mathbb{G} / \ h \sim g\}$$

Se $g \in \mathbb{G}$ é claro que $\mathbb{G}$ é a união dos subconjuntos *partição* $\{P_g, P_h, P_\ell \dots\}$; para cada par desses subconjuntos, por exemplo $P_g, P_h \Longrightarrow P_g, \cap P_h = \emptyset$, caso contrário pela *propriedade transitiva* $P_g, = P_h$, portanto $\{P_g, P_h, P_\ell \dots\}$ é uma *partição* de $\mathbb{G}$ efetuada por $\sim$.

Assim, é possível afirmar com base nos teoremas acima que a *partição das grandezas* de $\mathbb{G}$ em *grandezas* de espécie diferente g, h ...corresponde a partição de em *classes equivalentes* $[g]$, $[h]$ ...e vice-versa.

O produto de duas espécies de *grandezas físicas* define uma espécie de *grandeza resultante*. Essa multiplicação obedece a *propriedade comutativa da multiplicação* A_8. Então, o conjunto das *espécies de grandezas* junto com as relações de multiplicação A_8 munidos do elemento neutro A_6 e do elemento inverso, constituem um *grupo*, o *grupo das espécies de grandezas*. Então todos os elementos do grupo podem ser gerados por um conjunto finito de elementos, *os geradores do grupo*. Assim toda espécie de *grandeza* g pode ser expressa como

$$(8)\ \ g = h^{\alpha}, k^{\beta}, \ell^{\gamma}, \dots, w^{\omega}\ com\ \alpha, \beta, \gamma, \dots \omega \in \mathbb{R}$$

O *grupo das espécies de grandezas* constitui uma álgebra finitamente gerada.

Em toda classe de equivalência $\mathbb{C}(g)$ pode-se escolher uma *grandeza unitária* $[u]$, tal que todas as *grandezas* g de *mesma classe de equivalência* possam ser expressas em função de $[u]$ na forma

$$[9] \quad g = \alpha.[u]$$

Definição 12.

Todo sistema coerente de dimensões que define o conjunto $\mathbb{U}$ requer:

a) *que o conjunto* $\mathbb{U}$ *contenha exatamente uma dimensão* $[\mathrm{u}]$ *de cada classe* $\mathbb{C}(g)$.

b) *se* $[\mathrm{u}]$ é a *dimensão de* $\mathbb{C}(g)$ *e* $[\mathrm{v}]$ é a *dimensão de* $\mathbb{C}(h)$, a *dimensão* $[\mathrm{u.\,v}]$ de $\mathbb{C}(g.\,h)$ é igual a

Essa condição é coerente e equivale a usual condição de que em expressões escritas em termos de outras *dimensões* nenhum fator numérico adicional é introduzido. Então, dadas as *dimensões* $[\mathrm{u}]$, $[\mathrm{v}]$ e $[\mathrm{w}] \in \mathbb{U}$, o conjunto das *dimensões coerentes* valem as propriedades:

Associativa: $([\mathrm{u}].\,[\mathrm{v}].[\mathrm{w}])=([\mathrm{u}].\,[\mathrm{v}]).[\mathrm{w}]$.

Comutativa: $[\mathrm{u}].\,[\mathrm{v}] = [\mathrm{v}].\,[\mathrm{u}]$

Elemento Neutro: $[\mathrm{u}].\,[\mathrm{i}] = [\mathrm{u}]$

Elemento inverso: $[\mathrm{u}].\,[\mathrm{v}] = [\mathrm{i}] \leftrightarrow [\mathrm{v}] = [\mathrm{u}]^{-1}$

Divisão: $[\mathrm{u}].\,[\mathrm{v}] = [\mathrm{w}] \leftrightarrow [\mathrm{v}] =[\mathrm{w}].\,[\mathrm{u}]^{-1}$.

Dessa forma, o conjunto $\mathbb{U}$ das dimensões coerentes $[\mathrm{u}]$ munido da *propriedade comutativa* constitui um *grupo*, o *grupo das unidades*, que é *isomórfico* ao *grupo das espécies de grandezas* ou com o *grupo das classes equivalentes*. Portanto é uma álgebra finitamente gerada tal que, para toda grandeza g sua *dimensão* é dada pela *equação dimensional*

$$[g] = [a]^{\alpha}.[b]^{\beta}.[c]^{\gamma}.\cdots.[w]^{\omega} \; tal \; que \; \alpha, \beta, \cdots \omega \; \in \mathbb{Z}$$

As dimensões $[a]$, $[b]$...são as *dimensões base* do sistema de dimensões; todas as outras *dimensões* geradas por essa expressão em termo das *dimensões base* são *dimensões derivadas*

Todas as medidas físicas com as quais lidamos são (ou são tratadas como se fossem) escalas de razão, ou seja, elas são completamente determinadas, exceto por uma unidade escolhida arbitrariamente. A maioria, embora não todas, as medidas físicas têm várias unidades em uso comum; estes são geralmente acordados por uma Comissão Internacional[13]. Esta conclusão é válida para qualquer grandeza dimensional que dependa de várias grandezas básicas se variarmos apenas uma escala. Isso prova que as equações dimensionais das *grandezas físicas* devem ser uma potenciação de monômios.

2. ALGEBRA DO PONTO DE VISTA MICROSCÓPICO

Então, determinar as propriedades de um sistema físico sob investigação é realizar uma *medição*. Dessa forma o consenso geral de que a concepção de *medição* é uma comparação não é ambígua; pois considerando o sistema de interesse ou objeto S disposto num estado T colocado em contato adequado com outro sistema preparado independentemente (também chamado de *aparato* ou *instrumento de medida*), uma mensuração acoplada, resultará na *medida* *do observável* M, que é determinado pela leitura do valor indicado. Isso caracteriza o que é conhecido como *observável clássico*.

O termo *observável* se tornou uma designação padrão da Mecânica Quântica para o que costumava ser denominado de *grandeza* física ou *grandeza mensurável* na Física Clássica. Este termo deriva de *quantidade observável*. Uma *quantidade* ou *magnitude* é um predicado quantitativo como resposta provável ou mais-valia, supostamente espelhando em alguma *propriedade de um sistema concreto*; portanto uma magnitude M é uma conceitualização da propriedade P correspondente, é uma medida (BUNGE, 1973, p. 105).

Na Física Clássica todos os *observáveis* são objetivos em qualquer estado, representando toda propriedade ou *estado* de um sistema que pode ser determinada (observada) por uma sequência de operações físicas. Essas operações incluem quando o *sistema físico* S é submetido a algum processo experimental e a *leitura de valores* M é realizada em algum dispositivo de medição. Para todo *observável* é possível diferenciar uma *qualidade* e uma *quantidade* (uma distinção de interesse especial na Mecânica Quântica que rege os *fenômenos microscópicos*).

Experimentalmente qualquer *observável clássico* está relacionado a uma função de variáveis reais como o conjunto dos estados possíveis do sistema. Em outras palavras, na descrição macroscópica regida pela Física Clássica é possível obter em sistemas similares uma variação contínua de *quantidade* para cada *qualidade.* Como classicamente os *observáveis* são funções das coordenadas de posição e velocidades (momentos conjugados), podem então ser entendidos como uma função ou aplicação definida no *espaço de fases* do sistema, na verdade, uma *distribuição de probabilidade sobre o espaço de fases*. Eles sempre assumem valores bem definidos eventualmente desconhecidos.

Contudo é possível em princípio medir sem qualquer interferência o sistema observado. Assim classicamente o valor ou resultado da *medição* não é senão o *valor do observável antes e depois da medição*. Assim classicamente qualquer quantidade que possa ser medida diretamente por meio das operações e dos instrumentos de medição apropriados, ou indiretamente por meio de cálculos analíticos, é considerada *observável*. Embora *grandeza física* classicamente possa ser considerada, em algum sentido, *observável* (massa, momento, momento, energia), com o surgimento do Eletromagnetismo, essa situação mudou, pois são introduzidas *grandezas físicas* como *campos* e *potenciais* que *não são diretamente mensuráveis*, mas se revelam ferramentas e contribuições válidas para o cálculo e a resolução dos problemas físicos associados.

Na Mecânica Quântica esse fato foi acentuado pois os sistemas existem em estados nos quais o *observável não é objetivo*. Nesse caso o aparato não se refere a qualquer valor objetivo do *observável* antes da medida. Considerando dessa forma, não fica evidente que uma *medição* seja tal que o seu resultado se refere a um valor objetivo do *observável* após a *medição*. Então como explicar nessa situação a interpretação e ocorrência de um valor particular do indicador *observável*? A resposta equivale a fixar a noção de *medida*; assim o requerimento mínimo para que seja cumprida uma *medição* é a condição da *probabilidade de reprodutibilidade*. Portanto um *observável* é o *equivalente* quântico da *grandeza física* clássica.

O conceito de *medida* na Física Clássica baseia-se num procedimento discutido acima, o da *interação* entre o que se deseja medir e o instrumento de medição que pode ser feita arbitrariamente pequena em princípio, de modo que podemos afirmar que o procedimento realizado não causa nenhuma interferência no que se deseja medir. Entretanto, a experiência demonstra que a interação entre os sistemas físicos microscópicos e os instrumentos, não pode ser arbitrariamente pequena, e nem procedimento realizado pode ser precisamente compensado uma vez que, em certa extensão, é incontrolável e imperdível.

A *medição* na Mecânica Quântica envolve o *significado* das circunstâncias físicas do experimento; por exemplo, uma medição pode ocorrer em nível microscópico sem depender do instrumento de medição macroscópico e a presença ou ausência de interferência pode depender de uma comparação de diferentes observáveis em um experimento, mesmo que os observáveis não possam ser realmente observados pelo experimentador.

O acúmulo gradual de informações sobre o comportamento na microescala e atômica durante o primeiro quarto do século passado, nos forneceu indicações de como as coisas no microcosmo se comportam, produziu uma crescente confusão que foi finalmente resolvida entre 1926 e 1927 por E. Schrödinger (1887- 1961), W. Heisenberg (1901-1976) e Max Born (1882 –1970). Eles finalmente obtiveram uma descrição consistente de como as *novas Leis da Natureza* apenas poderiam ser consistentes se houvesse alguma *limitação básica nas nossas capacidades experimentais* que não tivessem sido reconhecidas anteriormente. Uma vez que o comportamento atômico é tão diferente da experiência cotidiana, é muito difícil se acostumar, ele parece peculiar e misterioso para todos, tanto para o leigo como para o físico experiente. Mesmo os *experts* não o entendem da maneira como gostariam, e é perfeitamente razoável que seja assim porque todas as experiências humanas diretas ou intuitivas se aplicam a objetos grandes. Nós sabemos pela nossa experiência imediata como as coisas se comportam, mas numa escala pequena elas não se comportam dessa forma. Então precisamos aprender sobre elas de uma forma abstrata ou imaginativa e não por analogia com nossa experiência direta.

Consideremos agora o problema do quanto no cérebro pode ser empurrado para longe o ponto de distinção entre o *observador e o que é observado*. Antes de fazer isso, porém, queremos enfatizar que a questão é completamente irrelevante no que diz respeito à *teoria das medições*, uma vez que, como já vimos, é necessário apenas levar a análise a algum estágio classicamente descritível do aparelho. No entanto, talvez seja de algum interesse entrar em algumas especulações sobre esse fascinante problema geral, sobre o qual muito pouca informação está disponível. Nosso o cérebro contém elementos essenciais da Mecânica Quântica, então o ponto de distinção não pode ser levado tão longe quanto esses elementos. Mesmo que o cérebro funcione de forma classicamente descritível, o ponto de distinção pode deixar de ser arbitrário, porque a resposta do cérebro pode não ser uma simples correspondência um a um com o comportamento do objeto sob investigação.

2.1 Tratamento matemático do processo de observação (SCHWINGER, 2000; 2001).

A tarefa da *teoria quântica da medição* é investigar a consistência semântica da Mecânica Quântica. Em termos gerais, a Mecânica Quântica, como uma teoria física, e a *teoria quântica da medição* como uma parte dela, são baseadas em uma divisão do mundo empírico em quatro partes: 1º) sistemas de objetos S (para ser observado), 2º) *equipamento de observação*, que denotamos por A, 3º) o ambiente $\mathcal{E}$ (o resto do mundo físico que se pretende ignorar) e 4º) observadores O. Dependendo do tipo de interpretação em questão, observador ou ambiente podem ou não serem negligenciados na descrição do processo de medição. O problema comum subjacente é o problema de objetificação; isso é, a questão de *como resultados de medição definidos são obtidos*.

Para Schwinger (1959) a representação clássica de grandezas físicas por números é a identificação de todas as propriedades com os resultados de tais medições não perturbadoras. É característico dos fenômenos atômicos, entretanto, que a *interação entre o sistema e o instrumento não pode ser indefinidamente enfraquecida*. Nem pode *a perturbação produzida pela interação ser compensada*, uma vez que só é previsível estatisticamente. Consequentemente, a *medição* de uma propriedade pode produzir mudanças incontroláveis no valor anteriormente atribuído a outra propriedade, e *não faz sentido atribuir valores numéricos a todos os atributos de um sistema microscópico*. A linguagem matemática apropriada ao domínio atômico é encontrada na transcrição simbólica das *leis da medição microscópica*. Basicamente sua ideia é substituir a abordagem simples e geral existente sobre as ondas *de De Broglie e Schrödinger*, por uma base que seja exclusivamente geral.

A proposta parte da análise de um experimento único: o experimento realizado pelo físico americano Otto Stern (1888-1969) em colaboração com com o físico alemão Walther Gerlach (1889-1979) em 1922 (GERLACH,STERN, 1922) e a quantificação do espaço.

Trata-se de um fino feixe de átomos de prata produzido pela evaporação em um forno e colimado por duas fendas em série, passando (em alto vácuo) entre dois polos de um imã não homogêneo (fig).

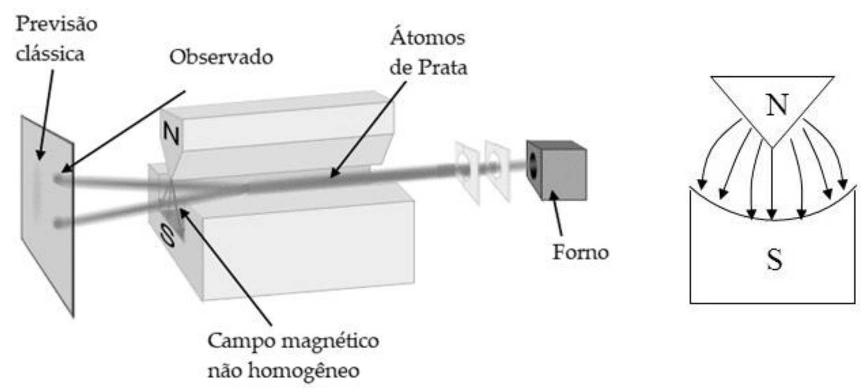


Figura 45 - Diagrama do experimento de Stern - Gerlach

Se uma partícula neutra passa por uma região com *campo magnético homogêneo*, a força exercida em direções opostas do *dipolo* se cancelam e o movimento da partícula é inalterado. No experimento de Stern-Gerlach foram usadas partículas neutras (átomos de Prata) e a mesma conclusão é obtida, uma vez que foi designado para testar *momento angular*, e não fenômenos eletrostáticos. Se a partícula viaja através de um *campo magnético* não homogêneo, então a força em um dipolo será ligeiramente maior que a força oposta no outro extremo (daí a forma irregular imã). A descrição matemática para explicar o resultado do experimento faz uso dos resultados da Eletrodinâmica de Maxwell.

Considerando o modêlo de Bohr, o átomo de Hidrogênio, portanto, um modêlo planetário clássico, com um electron em uma "órbita circular" ao redor do núcleo. Nesse modelo o electron se move com *velocidade tangencial constante* v, nessa trajetória circular muito particular de raio r. Existem nesse caso, *efeitos magnéticos* decorrentes, como é bem conhecido da Eletrodinâmica de Maxwell. No centro da trajetória está uma carga positiva nuclear, tornando o sistema eletricameente neutro, mas esse núcleo com massa relativamente grande, move-se tão vagarosamente ao redor do centro de massa do sistema que os possíveis *efeitos magnéticos* podem ser desprezados

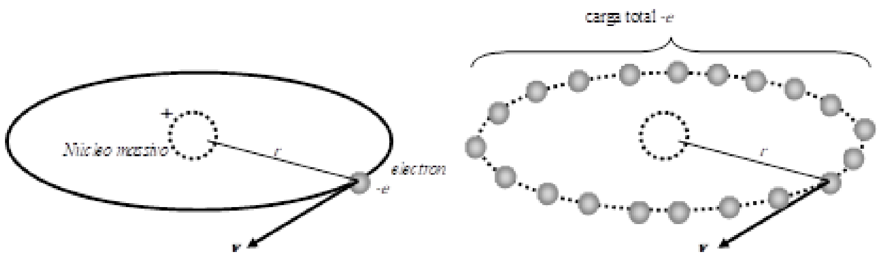


Figura 46

O *campo magnético* do sistema num certo intervalo médio de tempo absolutamente não é nulo. Isso porque devido ao movimento do electron em sua órbita nesse mesmo intervalo de tempo, tudo se passa como se existissem n cargas negativas na mesma trajetória circular numa "procissão em cadeia sem fim", como se estivessem contidas num "anel circular" de raio r definindo assim uma *espira de corrente circular de raio* r. Nesse caso, no mesmo intervalo de tempo médio, a *frequencia efetiva* f do electron, informa sobre o número de rotações por segundo

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{2\pi r}$$

A *corrente eletrica* nessa espira imaginária terá sentido oposto a v, e seu valor será

$$i = \frac{q}{\Delta t} = q.f = \frac{ev}{2\pi r}$$

A corrente eletrica i

$$i = \frac{ev}{2\pi r}[C/s]$$

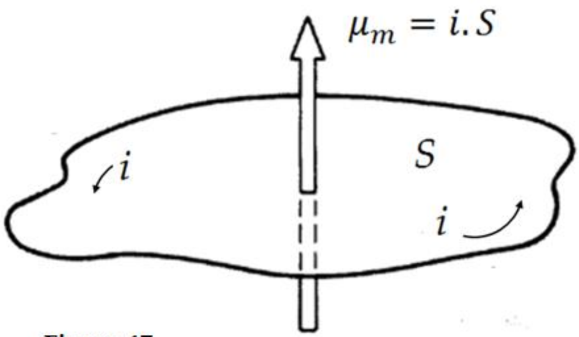


Figura 47

O produto (i.S) de dimenssão [IL^2] no S.I. é expresso em [$A.m^2$] representa o *momento magnético* μ_m (a letra em negrito, a, é costumeiramente usada para representar uma grandeza física vetorial no $\mathbb{E}^3$) da *espira virtual*. É evidentemente um vetor perpendicular ao plano definido da *espira* ou da superfície orientada S

$$\boldsymbol{\mu}_m = i.\boldsymbol{S}$$

No caso do electron, a área definida é de um plano circular, então a intensidade do vetor será

$$|\boldsymbol{\mu}_m| = \mu_m = \pi r^2 i = \pi r^2 \frac{ev}{2\pi r} = \frac{evr}{2}$$

$$\mu_m = \frac{evr}{2}$$

É possível determinar o *momento magnético* em função do *momento angular* L cuja intensidade é

$$L = m_e vr \Leftrightarrow v = \frac{L}{m_e r} \Longrightarrow \mu_m = -\frac{er}{2}\frac{L}{m_e r} = -\frac{e}{2}\frac{L}{m_e}$$

$$\mu_m = -\frac{eL}{2m_e}$$

Essa última equação envolve apenas constantes fundamentais, portanto uma solução bem geral pois inclui as órbitas circulares e elípticas. Como o *momento angular* se conserva, consequentemente o *momento magnético* também se conserva em intensidade e direção. A *razão giromagnética* será então

$$\frac{L}{\mu_m} = -\frac{2m_e}{e}$$

Portanto, deve haver uma *relação entre a magnetização de um material e seu momento angular*. Em termos macroscópicos,

$$\frac{|\boldsymbol{L}|}{|\boldsymbol{\mu}_m|} = \frac{2m_e}{e} = 1{,}138625.10^{-11}\left[\frac{kg}{C}\right]$$

No experimento, a força resusltante exercida pelo *campo não homogêneo* sobre o átomo de prata não excitado, cuja estrutura se assemelha a de um átomo alcalino (aqui neste caso o *momento magnético do electron* é mais evidente do que o do núcleo). O átomo nesse caso se comporta como um pequeno imã. O movimento ocorre através de uma região com a presença de um campo magnético não homogêneo, provocado pela forma geométrica de um dos polos do imã[14]. Se a intensidade do campo magnético é B em um dos polos magnéticos do átomo, no outro polo será B - ∇B de tal modo que a força efetiva sobre o átomo será

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\mu_m}.\boldsymbol{B} - \boldsymbol{\mu_m}.(\boldsymbol{B} - \nabla\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{\mu_m}.\nabla\boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\mu_m}.\nabla\boldsymbol{B}$$

A intensidade é portanto, assumindo que a direção ∇B é paralela a z, e o ângulo formado entre μ_m e B sendo θ

$$|\boldsymbol{F}| = F = \mu_m \frac{\partial B}{\partial z} \cos\theta$$

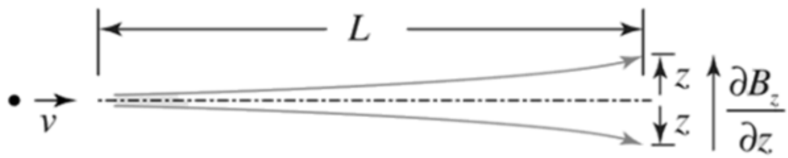


Figura 48

Classicamente, o *momento magnético* pode assumir qualquer ângulo em relação à direção do campo magnético e, portanto, seria de esperar que houvesse uma distribuição aleatória dos ângulos de deflexão. Se, no entanto, a *quantização do espaço* for real, as deflexões deveriam ocorrer apenas em ângulos de deflexão θ específicos. Devido ao movimento de *precessão* ao redor de B (conhecida como *precessão de Larmor*) a componente $(\mu_m)_z$ ao longo do percurso permanece constante, mas as outras oscilam ao *redor de zero*. Tudo acontece como se cada átomo estivesse submetidoao valor médio da força em várias oscilações $(\mu_m)_z\frac{\partial B}{\partial z}$ Levando em conta a geometria do diagrama (fig.48), e *K* a energia cinética dos átomos do feixe incidente, um simples cálculo permite determinar o valor de θ:

$$z = \frac{1}{2}a_z t^2 = \frac{1}{2}\frac{F_m}{m_{\acute{a}tomo}}\left(\frac{L}{v}\right)^2 = \frac{1}{2m_{\acute{a}tomo}v^2}L^2\mu_m\frac{\partial B}{\partial z} = \frac{L^2}{4K}\mu_m\frac{\partial B}{\partial z}$$

Mas

$$\frac{z}{L} = \cos\theta \Longrightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mu_m.L}{4K}\frac{\partial B}{\partial z}\right)$$

O desvio é portanto proporcional as componenete de μ_m na direção do campo magnético. Estando os átomos orientados aleatoriamente, $(\mu_m)_z$ pode assumir os valores de compreendidos entre $+(\mu_m)_z$ e $-(\mu_m)_z$ e todos os ângulos de desvio, valores compreendidos entre os dois valores correspondentes. O impacto na chapa fotográfica apresenta o resultado como duas pequenas manchas equidistantes e alinhadas paralelamente a z

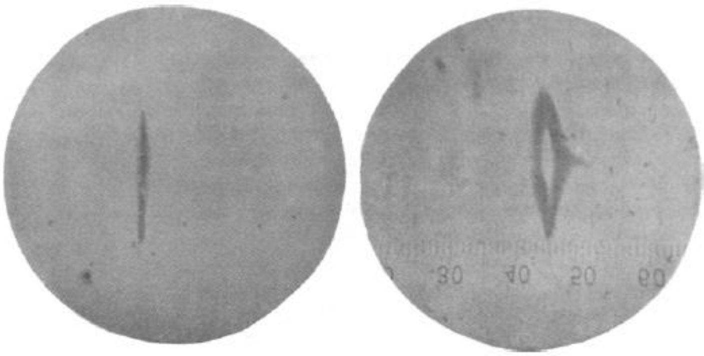


Figura 49

O que se observa é uma sucessão de pequenas manchas equidistante e alinhadas paralelanebte ao eixo Oz, se é feito o campo variar, ou seja , a distancia entre as manchas ocorre na mesma proporção, sem que o resultado da imagem sofra qualquer alteração, permanecendo constante o número n de manchas. Cada uma das manchas corresponde a um valor de $(\mu_m)_z$; portanto uma magnitude quantificada suscetivel a asssumir n valores distintos. A componenete do *momento angular* L_z possue evidentemente a mesma propriedade.

É possível objetar a interpretação desse experimento por ela estar baseada em uma hipótese muito particular em relação a origem do *paramagnetismo atômico*; a existência de um *momento magnético* permanente proporcional ao *momento angular*. a negação do fato, dificulta a compreensão do experimento para a explicação das n manchas distintas sobre o anteparo sem admitir que certas magnitudes que caracterizam os movimentos internos estão quantificadas. Logo, a medida que o *centro de massa* segue as leis da Mecânica Clássica, sua trajetória vem totalmente determinada pelo estado dinâmico do átomoao chegar na região do imã e o aparecimento sobre o anteparo de uma distribuição de impactos mais ou menos espaçados, é interpretado não estando os átomos nas mesmas condições iniciais e que as variáveis dinâmicas que definem o estado iniicial estão *estatisticamente* distribuidas dentro de um certo domínio extenso. A existencia das n manchas separadas confirma essa distribuição estatística apresentando ao menos n descontinuidades, ou de outro modo, *certas variáveis dinâmicas do átomo estão quantificadas*, como praticamente todos os átomos estão em seu estado fundamental, caso contrário emitiriam radiação, assim não se pode tratar da quantificação da energia mas da *quantificação da variável dinâmica de orientação no espaço do átomo*.

O experimento Stern-Gerlach (SG) usando átomos de prata é a medição de uma quantidade física, $(\mu_m)_z$, que por acaso tem apenas dois valores possíveis, digamos $+(\mu_m)_z$ e $-(\mu_m)_z$. Agora generalizando (SCHWINGER, 2001) e considerando o $(\mu_m)_z$ apenas como um exemplo de uma quantidade física A que tem os valores possíveis $a_1, a_2, \dots a_n$; um valor típico será designado como a_i ou a_j. Em todo o caso, obtém-se informações estudando a *interação do sistema de interesse*, que denotamos a seguir por S. Podemos afirmar que, em cada caso, nosso equipamento físico específico que mede $(\mu_m)_z$ seleciona um determinado resultado com relação a S (+, 0 ou −). Para especificar melhor os processos vou adaptar uma simbologia para um equipamento S inespecífico, de acordo com Schwinger (2001), *medida* A *seleciona* a_i.

$$\langle A \overset{\mathrm{m}}{=} a_i \rangle$$

Tudo isso traz a implicação de que uma medida é um ato físico que ocupa uma região finita do espaço-tempo. Representando de forma mais adequada que contém a implicação de uma *região finita associada ao ato de medição*; então, *medida* A *seleciona* $|a_i\, a_j|$.

$$\langle A \overset{m}{=} a_i \rangle \Longrightarrow |a_i\, a_i|$$

A propriedade física A é implícita, tem o *status* implicitamente dado por a_i, preparando o caminho para uma generalização. É um lembrete de que uma *medição seletiva* envolve um *ato inicial seguido de sua verificação*, na simbologia adotada para a medida

$$\langle A \overset{m}{=} a_i \rangle \langle A \overset{m}{=} a_i \rangle$$

São introduzidos valores numéricos para dois *atos de medição* particularmente simples: *aceita tudo 1, rejeita tudo 0*. Um primeiro passo para a *construção de uma álgebra* para esses símbolos é feito na representação de atos sucessivos de medição, deslocadas no tempo, por multiplicação sequencial dos respectivos símbolos. Assim, generalizando para um caso, a *medida*

$$\langle A \overset{m}{=} a_i \rangle \langle A \overset{m}{=} a_i \rangle \Longrightarrow |a_i\, a_i| . |a_i\, a_i|$$

Afirma que a repetição de uma *medição seletiva* confirma que a *medição* é simbolizada por

$$\langle A \overset{m}{=} a_i \rangle \langle A \overset{m}{=} a_i \rangle = \langle A \overset{m}{=} a_i \rangle \Longrightarrow |a_i\, a_i| . |a_i\, a_i| = |a_i\, a_i|$$

Num segundo caso onde a generalização leva a

$$\langle A \overset{m}{=} a_i \rangle \langle A \overset{m}{=} a_j \rangle = \langle A \overset{m}{=} a_j \rangle \langle A \overset{m}{=} a_i \rangle = 0 \Longrightarrow a_i \neq a_j \therefore |a_i\, a_j| . |a_j\, a_j| = 0$$

Então, obviamente sobre a multiplicação dos símbolos de medição 1 e 0,

$$|a_i\, a_i| . 1 = 1. |a_i\, a_i| = |a_i\, a_i| \Leftrightarrow 1.1 = 1$$

Logo

$$1.0 = 0.1 = 0 \Leftrightarrow |a' a'| . 0 = 0. |a' a'| = 0 \; e \; 0.0 = 0$$

Voltando um pouco para notar a equivalência, *medida* A *seleciona* a' é coincidente com a *medida* (A-a') *seleciona 0*

$$\langle A \overset{m}{=} a_i \rangle \equiv \langle A - a_i \overset{m}{=} 0 \rangle$$

Quando

$$\langle (A - a_i)(A - a_j) \overset{m}{=} 0 \rangle$$

É aceito sem distinção que a medida A tem resultado a_i ou a_j. Para uma *medida menos seletiva*, representada pela adição dos respectivos símbolos quando $a_i \neq a_j$

$$\langle (A - a_i)(A - a_j) \overset{m}{=} 0 \rangle \equiv |a_i\, a_i| + |a_j\, a_j| = |a_j\, a_j| + |a_i\, a_i|$$

São somas equivalentes a permutação $2\,! = 2$. Incorporando a *simetria completa* entre a' e a" e dando continuidade nessa mesma via quando $a_i \neq a_j \neq a_k \neq a_i$

$$\langle (A-a_i)(A-a_j)(A-a_k) \overset{\text{m}}{=} 0 \rangle \equiv |a_i\, a_i| + |a_j\, a_j| + |a_k\, a_k|$$

É equivalente a *permutação 3!= 6.* Então uma *permutação* equivalente a *n*!

$$\langle (A-a_1)\cdots(A-a_n) \overset{\text{m}}{=} 0 \rangle \equiv |a_1 a_1| + |a_2 a_2| + \cdots |a_n a_n| = \sum_{i=1}^{n} |a_i\, a_i|$$

Como a *medida* que aceita todos os resultados possíveis sem distinção é simbolizada por 1, a última soma deve ser igual a 1.

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i\, a_i| = 1$$

Estabelecendo assim a *completeza* dos símbolos $|a_1\, a_1|$. Com a opção de aceitar 1 ou 0:

$$|a_i\, a_i| + 0 = 0 + |a_i\, a_i| = |a_i\, a_i| \therefore$$
$$1 + 0 = 0 + 1 = 1$$
$$0 + 0 = 0$$

Isso é consistente com as propriedades estabelecidas para $|\, a_i\, a_i|$ e atuando como 1

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i\, a_i|\right) |a_j\, a_j| = |a_j\, a_j|$$

A *lei distributiva em relação a multiplicação* para um produto com soma é a soma dos produtos (note que o sentido da operação é importante):

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i\, a_i|\right) |a_j\, a_j| = \sum_{i=1}^{n} |a_i\, a_i| . |a_j\, a_j| = \sum_{i=j} |a_i\, a_i| . |a_j\, a_j| + \sum_{i\neq j} |a_i\, a_i| . |a_j\, a_j|$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i\, a_i|\right) |a_j\, a_j| = |a_j\, a_j| + 0 + \cdots + 0 = |a_j\, a_j|$$

Para medidas sucessivas

$$|a_i\, a_j||a_j\, a_k| = |a_i\, a_k|$$

Assim,

$$|a_i\, a_j||a_k\, a_\ell| = 0 \;\Leftrightarrow a_j \neq a_k$$

Nesse caso

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i\, a_i|\right) |a_j\, a_k| = \sum_{i=1}^{n} |a_i\, a_i| . |a_j\, a_k| = \sum_{i=j} |a_i\, a_i| . |a_j\, a_k| + \sum_{i\neq j} |a_i\, a_i| . |a_j\, a_j|$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i\, a_i|\right) |a_j\, a_k| = |a_j\, a_j||a_j a_k| + 0 + \cdots = |a_j a_k|$$

Portanto

$$|a_i\ a_j||a_j\ a_i| = |a_i\ a_i|$$
$$|a_j\ a_i||a_i\ a_j| = |a_j\ a_j|$$

Os produtos do lado esquerdo diferem apenas na ordem de multiplicação; os lados direitos são diferentes se $a_i \neq a_j$. A ordem de multiplicação pode ser significativa. Esta álgebra em evolução o produto não é comutativo. E, como poderíamos foi notado antes para $a_i \neq a_j$

$$|a_i\ a_i||a_j\ a_j| = 0$$

Valendo para $|a_i\ a_i|$ e $|a_j\ a_j|$ não nulos, assim também

$$|a_i\ a_j||a_i\ a_j| = 0\ com\ |a_i\ a_j| \neq 0$$

2.2 Parêntesis de Poisson e os Comutadores.

Farei um pequeno relato sobre um conceito introduzido por Paul A. M. Dirac, em 1925, na Mecânica Quântica.

O estado uma partícula é definido pela amplitude ψ(x,t) e o valor esperado de x(t) é dado pelo valor médio

$$\underbrace{\langle x(t)\rangle}_{\substack{valor\\ médio}} = \int_{-\infty}^{\infty} x.\ \underbrace{|\psi(x,t)|^2}_{\substack{densidade\\ de\\ probabilidade}}\ dx$$

Isso não significa que serão realizadas várias medidas para determinar o valor médio como ocorre em experimentos convencionais de laboratório. É a média ⟨x(t)⟩ das medições feitas, todas no estado ψ(x, t). Significa, separar um conjunto de partículas, cada uma no mesmo $\psi(x,t)$ e medir a posição de todas elas: ⟨x(t)⟩ é a *média dos resultados*. Richard Feynman (1948) fez isso para todas as trajetórias possíveis de uma mesma partícula. Considere a pergunta: *Qual prioridade deve existir: a do tempo sobre o espaço ou vice –versa?* Nenhuma das duas, o que ocorre na realidade é bem diferente e a melhor resposta está na *otimização*, não há mais necessidade da *causalidade*.

A Natureza escolhe entre todas as possibilidades que lhe são oferecidas, aquela que é a mais eficaz, e a mais eficaz é a que obedece ao *Princípio da Mínima Ação* (GOLDSTEIN, 1980; LANCZOS, 1986: LEECH, 1971). Em outras palavras, dentre as inúmeras maneiras pelas quais um sistema pode alterar sua configuração durante um intervalo de tempo (t_B-t_A), o movimento real que ocorre é aquele que maximiza ou minimiza a integral anterior.

$$S(B,A) = \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{L}(x,\dot{x},t).dt$$

A função $\mathcal{L}$ é a *função lagrangeana*, que depende das posições, das velocidades e do tempo explicitamente; onde a quantidade , representa o *excesso de Energia Cinética sobre a Energia Potencial*, sendo assim

$$S(B,A) = \int_{t_A}^{t_B} (T - V).dt$$

Como a *causalidade* não é necessária, a ideia de um corpo se mover de acordo com o Axioma II de Newton, perde o sentido; então a descrição de uma *trajetória adequada* para um corpo ir por exemplo de uma posição *inicial* para uma posição *final* vai depender na verdade entre todos *os prováveis percursos* a serem realizados aquele que tem a maior *probabilidade* para a ação *S* (*B*, *A*) ser um *mínimo*.

Axioma 3.

Os corpos na Natureza não podem escolher entre o percurso mais curto ou o mais breve; nesse caso a integral de ação é um mínimo.

Mas esse *princípio* está formulado de maneira incompleta. A partícula não toma o *caminho de mínima ação*, ela percorre aquele que tem a *menor ação*, por um método análogo àquele que a *luz percorre aquele com o menor tempo*. E essa analogia ótico-mecânica está implícita no *princípio*. Qualquer *caminho* que a luz percorra num intervalo de tempo diferente, ela chega com uma *fase diferente*. A *amplitude total* em um ponto é a *soma das amplitudes de todas as diferentes maneiras pelas quais a luz pode chegar*. O *caminho importante* é aquele para o qual existem muitos caminhos próximos que dão a mesma fase.

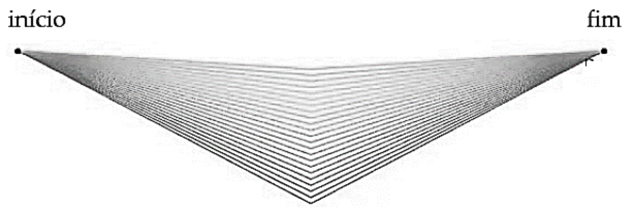


Diagrama apresentando as contribuições da *integral de caminho* para o conjunto de trajetorias de uma particula

É exatamente a mesma coisa na Mecânica Quântica. Portanto funciona assim: a *probabilidade* de que uma partícula, saindo do ponto *inicio* no instante t, chegue no ponto *fim* no instante $(t+\delta t)$, é o quadrado de uma amplitude de *probabilidade* $\psi(x,t)$. A *amplitude total* pode ser escrita como a *soma das amplitudes de cada caminho possível* de cada maneira de chegar. Para cada $x(t)$, para cada trajetória imaginária possível temos que calcular uma amplitude. E então todas são somadas. A *integral da ação* afirma que a *amplitude de uma trajetória* deve ser proporcional a $e^{iS/\hbar}$ (o ângulo de fase é $S/\hbar$, com a constante de Planck racionalizada). A interpretação da *soma das histórias*, a *integral do caminho* é considerada fundamental e a realidade é vista como uma única "classe" indistinguível de caminhos que compartilham os mesmos eventos.

Voltando, após esse breve interlúdio, é bem conhecido que Sir William Rowen Hamilton (1805-1865) formulou uma nova abordagem para a Mecânica Clássica ou Analítica (GOLDSTEIN, 1980; LEMOS, 2007; LANCZOS, 1986; BUCHDAHL, 1993),, ao unificar a Óptica com a Mecânica, em uma tentativa de explicar o comportamento da luz. Nessa abordagem as equações de Hamilton aparecem como uma extensão ao trabalho de Lagrange. Como foi visto acima, a *função lagrangeana*, depende das posições, das velocidades e do tempo explicitamente; onde a quantidade

$$\mathcal{L}(x,\dot{x},t) = T - V$$

De uma forma mais geral ela pode ser definida de uma forma *mais geral* que com coordenadas podem cartesianas, ou coordenadas polares, ou qualquer outra coisa que possamos pensar. A notação para um *sistema geral de coordenadas* é q_i . Essas *coordenadas generalizadas* definem as *velocidades generalizadas* de tal modo que a *função lagrangeana* seja definida por

F81

Supondo que as coordenadas de um sistema dinâmico abstrato sejam q_i . A idéia geral de uma *transformação infinitesimal* é que ela é uma pequena mudança das coordenadas, que pode depender do valor das coordenadas. O deslocamento é parametrizado por um parâmetro infinitesimal δ, e tem a forma δq_i. A operação δ representa uma variação de qualquer parâmetro particular do sistema por uma quantidade infinitesimal distante do valor tomado pelo parâmetro. Isso define a chamada variação δ do caminho e δq_i *sua variação virtual*, sujeita apenas à limitação de que $\delta q_i(t)= \delta q_j(t)$, ou seja, conecta duas configurações possíveis no mesmo instante. Portanto $q_1(t)=x(t)$ e $q_2(t)=y(t)$, então $\delta q_1(t)= \delta x(t)$ e $\delta q_2(t)= \delta y(t)$, um pequeno cálculo

$$\delta\dot{q}_i = \delta\left(\frac{dq_i}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(\delta q_i)$$

Determinando o quanto muda a *função lagrangeana* quando é realizada uma *transformação virtual* na posição e na velocidade

$$\delta\mathcal{L}(q_i,\dot{q}_i,t) = \sum_i\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\delta\dot{q}_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}\delta q_i\right)$$

As quantidade $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}$ é justamente o *momento generalizado conjugado a* q_i, um conceito que transcende a simples ideia de *momento* cartesiana. Portanto as equações de *Euler- Lagrange*

$$p_i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i} \therefore \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}$$

$$\delta\mathcal{L}(q_i,\dot{q}_i,t) = \sum_i\left(p_i\delta\dot{q}_i + \frac{dp_i}{dt}\delta q_i\right) \Leftrightarrow \delta\mathcal{L}(q_i,\dot{q}_i,t) = \frac{d}{dt}\left(\sum_i p_i\delta q_i\right)$$

Quando a derivada temporal se anula temos um resultado *conservativo*. A *conservação da energia* aparece então em

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(q_i,\dot{q}_i,t) = \sum_i\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\ddot{q}_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}\dot{q}_i\right) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} \therefore$$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(q_i,\dot{q}_i,t) = \sum_i(p_i\ddot{q}_i + \dot{p}_i\dot{q}_i) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} = \frac{d}{dt}\sum_i(p_i\dot{q}_i) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}$$

A última revela um fato interessante, se for definida uma função $\mathcal{H}$

$$\sum_i(p_i\dot{q}_i) - \mathcal{L} = \mathcal{H} \Rightarrow \frac{d\mathcal{H}}{dt} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}$$

Significa que $\mathcal{H}$ varia com o tempo se a *função lagrangeana* variar explicitamente com o tempo. Essa função a $\mathcal{H}$ é a *hamiltoniana* ou função de Hamilton. A partir dessa relação com a *função lagrangeana* determina-se as *equações canônicas* de Hamilton

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial}{\partial q_i}\mathcal{H}(q_i, p_i)$$
$$\dot{q}_i = \frac{\partial}{\partial p_i}\mathcal{H}(q_i, p_i)$$

No século XIX os matemáticos franceses desenvolveram uma forma matemática muito elegante para a formulação da Mecânica embora o grau realmente surpreendente de sucesso não se tornou aparente até o século XX, quando a Mecânica Quântica foi descoberta. Quase parece que a geração anterior de matemáticos era clarividente na maneira como inventou paralelos exatos dos conceitos quânticos posteriores. Sem especificar uma função particular, seja $\mathcal{U}(q_i, p_i)$ tal que qualquer trajetória real do sistema definirá um valor de F que varia ao longo da trajetória

$$\frac{d\mathcal{U}}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_i}\dot{q}_i\right) = \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_i}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial p_i}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}\right)$$

Esse resultado é conhecido como *parêntesis* ou *colchete de Poisson*. O *parêntesis de Poisson* de quaisquer duas funções que representem *variáveis dinâmicas*, $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$, é definido como

$$\{\mathcal{U}, \mathcal{V}\} = \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_i}\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial p_i} - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial p_i}\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_i}\right)$$

Então

$$\frac{d\mathcal{U}}{dt} = \{\mathcal{U}, \mathcal{V}\} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t}$$

Se fizer $\mathcal{U}=q_i$ e depois $\mathcal{U}=p_i$ quando não apresentam dependência temporal explícita e para $\mathcal{V} = \mathcal{H}$

$$\frac{dq_i}{dt} = \{q_i, \mathcal{H}\}\ e\ \frac{dp_i}{dt} = \{p_i, \mathcal{H}\}$$

São as *equações de Hamilton* definidas com os *parêntesis de Poisson*.

As vantagens teóricas para escrever as equações de movimento de uma variável dinâmica arbitrária residem no fato que os *parêntesis de Poisson* são invariantes mediante as transformações canônicas.

Propriedades (LEMOS, 2007; LEECH, 1971).

P1. *Anti –simetria*

Sejam duas funções que representem *variáveis dinâmicas*, $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$

$$\{\mathcal{U}, \mathcal{V}\} = -\{\mathcal{V}, \mathcal{U}\}$$

P2. *Linearidade*

Sendo $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ duas funções, existe uma função $\mathcal{Q}$, que representam *variáveis dinâmicas* e um coeficiente σ independente de (q, p)

$$\{\mathcal{U} + \alpha\mathcal{Q}, \mathcal{V}\} = \{\mathcal{U}, \mathcal{V}\} + \sigma\{\mathcal{Q}, \mathcal{V}\}$$

P3. Dadas as funções $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ e $\mathcal{Q}$

$$\{\mathcal{U}\mathcal{V}, \mathcal{Q}\} = \mathcal{U}\{\mathcal{V}, \mathcal{Q}\} + \{\mathcal{U}, \mathcal{Q}\}\mathcal{V} \therefore \{\mathcal{U}, \mathcal{V}\mathcal{Q}\} = \{\mathcal{U}, \mathcal{V}\}\mathcal{Q} + \mathcal{V}\{\mathcal{U}, \mathcal{Q}\}$$

P4. *Identidade de Jacobi.*

$$\left\{\{\mathcal{U}\mathcal{V}\}, \mathcal{Q}\right\} + \left\{\{\mathcal{V}, \mathcal{Q}\}, \mathcal{U}\right\} + \left\{\{\mathcal{Q}\mathcal{U}\}, \mathcal{V}\right\} = 0$$

P5. Seja λ um parâmetro

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\{\mathcal{U}, \mathcal{V}\} = \left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}\mathcal{U}, \mathcal{V}\right\} + \left\{\mathcal{U}, \frac{\partial}{\partial\lambda}\mathcal{V}\right\}$$

Aqui λ pode assumir qualquer das variáveis q, p ou t ou um outro parâmetro qualquer.

P6. *Parêntesis de Poisson fundamentais*

$$\left\{q_i, q_j\right\} = 0\ ;\ \left\{p_i, p_j\right\} = 0\ ;\ \left\{q_i, p_j\right\} = \delta_{ij}$$

O *parêntesis de Poisson* tem sua importância como foi dito acima, na transição da Mecânica Clássica para a Mecânica Quântica, onde a chamada *quantização canônica* consiste em associar uma *variável dinâmica* $\mathcal{A} \equiv$ A ($q_1, q_2, \ldots, q_n; p_1, p_2, \ldots, p_n$) que necessita uma especificação da ordem das coordenadas q_i e p_i , na expressão explícita da função A ($q_1, q_2, \ldots, q_n; p_1, p_2, \ldots, p_n$). Na prática a matriz A tem uma forma polinomial nos p_i cujos coeficientes são função dos q_i . A matriz A associada a *variável dinâmica*, é considerada como um *operador* para cada variável dinâmica. A terminologia empregada é devido a indicação de que existe uma falha em *comutar*. Na representação de Heisenberg um *operador* A satisfaz

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[A, H] + \frac{\partial A}{\partial t}$$

Onde H é o *operador hamiltoniano* e o *comutador* é dado por

$$[A, H] = AH - HA$$

A *comutação de dois operadores* corresponde ao *parêntesis de Poisson* clássico multiplicado por $i\hbar$.

$$[U, V] \rightarrow i\hbar\{\mathcal{U}, \mathcal{V}\}$$

A Mecânica formulada na linguagem dos *parêntesis de Poisson* representa o análogo clássico da representação de Heinseberg. Tal formulação não era totalmente conhecida pelos físicos do início do século XX (apenas alguns matemáticos tinham conhecimento, por exemplo, David Hilbert e Max Born). O grande avanço foi que Dirac pode escrever as condições de quantização em termos de Dinâmica Hamiltoniana Clássica, usando a equivalência da diferença dos produtos de Heisenberg para colchetes de Poisson. Há outra característica fundamental da abordagem de Dirac. Observe que o procedimento incorpora a Mecânica Quântica no próprio coração da dinâmica hamiltoniana. Assim como Heisenberg apreciou ter aplicado *conceitos quânticos ao próprio espaço*, Dirac fez a mesma coisa tratando o *momento* e as *coordenadas espaciais* no mesmo pé e introduzindo a *condição de quantização* de Bohr nos fundamentos da mecânica hamiltoniana.

Sejam duas funções que representem dois símbolos de medição, X e Y, o comutador

$$[X, Y] = XY - YX$$

O *anticomutador* é

$$[X, Y]^* = XY + YX$$

Então, se [X,Y] = 0, [X,Y]*= 2 XY ou 2YX. Nesse caso, pode ser considerado ½[X,Y]*como um *produto simetrizado* de *X* e *Y*. Como consequência imediata vale a identidade

$$XY = \frac{1}{2}.[X, Y]^* + \frac{1}{2}.[X, Y]$$

Como todos sabem, como foi bem discutido na primeira parte deste artigo, o resultado de uma *medição* é um número. Devemos ter *números* bem como *símbolos abstratos de medição* nesta Álgebra, as definições óbvias dos números básicos um e zero são:

$$\underbrace{1}_{número} .\left|a_i a_j\right| = \left|a_i a_j\right| \quad e \quad \underbrace{0}_{número} .\left|a_i a_i\right| = \overbrace{0}^{símbolo}$$

Dessa forma, valem os produtos

$$\left|a_i a_j\right|\left|a_k a_\ell\right| = \begin{cases} \left|a_i a_\ell\right| = 1.\left|a_i a_\ell\right| \Leftrightarrow a_j = a_k \\ 0.\left|a_i a_\ell\right| = 0 \Leftrightarrow a_j \neq a_k \end{cases}$$

Portanto

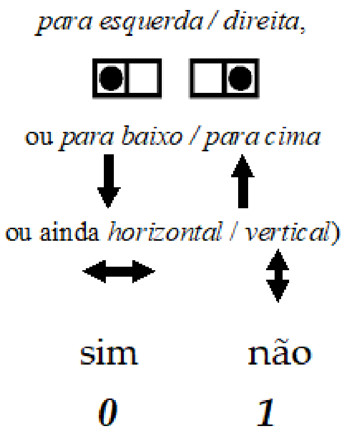
$$\left|a_i a_j\right|\left|a_k a_\ell\right| = \delta.\left(a_j, a_k\right)\left|a_i a_\ell\right| \; com \; \delta.\left(a_j, a_k\right) = \begin{cases} 1 \leftrightarrow a_j = a_k \\ 0 \leftrightarrow a_j \neq a_k \end{cases}$$

Observe outro fato,

$$1.\left|a_i a_j\right| + 1.\left|a_i a_j\right| = (1+1)\left|a_i a_j\right|$$
$$1.\left|a_i a_j\right| + 1.\left|a_i a_j\right| = 2.\left|a_i a_j\right|$$

2.3 Vetores de Estado e representação de Dirac.

O conceito de *estado* de um sistema quântico foi estabelecido no parágrafo anterior, então pensando um pouco mais sobre o que significa a operação $|a_i,a_j|$, no experimento de Stern e Gerlach, onde apenas uma partícula identificada com o valor a_i da propriedade A, um breve a_i, permite uma leitura



O resultado na saída é uma partícula a_j . É como se a partícula em princípio a_i fosse destruída e em seu lugar fosse criada uma partícula a_j.

Este é um processo mental de duas etapas que é indistinguível do mundo real. Sugere a possibilidade de representar o estado de spin de um átomo de prata no experimento, por um *tipo de vetor em um novo tipo de espaço vetorial bidimensional*, um *espaço vetorial abstrato* que não deve ser confundido com o espaço bidimensional usual.

Com base nos princípios gerais da Mecânica Quântica, a propriedade A será medida com o valor $a_{i.}$ quando entra no equipamento; e como resultado na saída será a_j . Paul A. M. Dirac (DIRAC, 1939) desenvolveu uma notação padrão para representar os estados quânticos para tais processos, também é utilizada para denotar vetores e funcionais lineares abstratos na Matemática. A notação associa a cada estado dinâmico um certo tipo de vetor denominado *vetor ket* e representado pelo símbolo |>. Assim por exemplo o *ket* u é representado pelo símbolo |u>. Os *kets* formam um *espaço vetorial linear* em *infinitas dimensões* (*Espaço de Hilbert*, uma denominação dada após David Hilbert, em sua publicação de 1912, generalizar a noção de Espaço Euclidiano; ele estendeu os métodos da Álgebra Vetorial e Cálculo do Espaço Tridimensional para espaços com qualquer número de dimensões (BOURBAKI, 2003 e 1967); portanto qualquer combinação linear de *kets* tem como resultado um vetor *ket*. O *estado físico* por exemplo no experimento SG usando átomos de prata é representado por

$$|u\rangle = \alpha|u_1\rangle + \beta|u_2\rangle$$

A soma é um *ket*.

Também é conhecido da Álgebra Linear, que podemos associar ao *espaço vetorial* um *espaço vetorial dual*. Dessa forma qualquer função linear dos *kets* possui uma propriedade de superposição característica dos vetores que consequentemente é denominada *vetor bra* representado pelo símbolo <|. Assim uma função qualquer f (|u>) define o *bra* <f |. O valor que a função toma para um *ket* |u> particular é um *número complexo* em geral que é representado pelo símbolo <f | u>.

Então pode-se assim representar a ideia discutida simbolizada como

$$\overbrace{|a_i a_j|}^{\substack{a_i\ entra \\ e\ sai\ a_j}} \equiv \underbrace{|a_i\rangle\langle a_j|}_{\substack{a_i destruido \\ a_j criado}}$$

Isso representa um passo à frente, um produto de dois símbolos de um novo tipo. O produto é conhecido como *o produto externo*, sendo considerado como um *operador*; portanto, é fundamentalmente diferente do produto interno , que é apenas um número. Um *operador* deve atuar à esquerda de um *ket* ou à direita de um *bra*.

Axioma 4. Propriedade Associativa.

Dado o operador e o ket vale a associatividade:

$$\left(|a_i\rangle\langle a_j|\right).|a_k\rangle = |a_i\rangle\left(\langle a_j|a_k\rangle\right)$$

Se houver compatibilidade das propriedades algébricas apreendidas com a simbologia $|a_i a_j|$ com a simbologia de Dirac, então ficará confirmada a validade da álgebra do processo experimental; assim

$$|a_i\rangle\langle a_j|a_k\rangle\langle a_\ell| = \delta(a_j, a_k)|a_i\rangle\langle a_\ell| = \langle a_j|a_k\rangle$$

Portanto,

$$\langle a_j|a_k\rangle = \delta(a_j, a_k)$$

O significado físico é consistente desde que se considere que a_j represente a situação *final* e a_k a situação inicial

$$\langle a_j|a_k\rangle = \begin{cases} a_i = a_j \ : Sim, representado\ por\ 1 \\ a_i \neq a_j \ : Nao, representado\ por\ 0 \end{cases}$$

Agora, de forma mais geral relativo ao experimento de SG, primeiro medimos alguma propriedade A e selecionamos o resultado particular a_i que simbolizamos pela criação de uma partícula a_i, indicando . Sequencialmente é realizada uma outra medição B (sem especificação) e simbolizado por M() de tal modo que Na etapa final ocorre a aniquilação (detecção) de $a_i = \alpha$ produzindo um número que é uma *probabilidade*

$$\mathcal{P}\left(a_i, M(B)\right) = \langle a_i|M(B)|a_i\rangle$$

Podem ser considerados *três tipos de medição*:

1ª) a medida B que seleciona b_m

$$M(B) = |b_m\rangle\langle b_m| \Longrightarrow \mathcal{P}(a_i, |b_m, b_m|) = \mathcal{P}(a_i, b_m) = \langle a_i|b_m\rangle\langle b_m|a_i\rangle$$

2ª) a medida B que seleciona qualquer b_m ou b_n onde $b_m \neq b_n$

$$M(B) = |b_m\rangle\langle b_m| + |b_n\rangle\langle b_n|$$

$$\mathcal{P}(a_i, b_m ou\ b_n) = \langle a_i|b_m\rangle\langle b_m|a_i\rangle + \langle a_i|b_n\rangle\langle b_n|a_i\rangle = \mathcal{P}(a_i, b_m) + \mathcal{P}(a_i, b_n).$$

3ª) a medida B que seleciona todo b_m sem influencia

$$M(B) = \sum_m |b_m\rangle\langle b_m| = 1$$

$$\mathcal{P}(a_i, 1) = \sum_m \langle a_i|b_m\rangle\langle b_m|a_i\rangle = \langle a_i|1|a_i\rangle = \sum_m \mathcal{P}(a_i, b_m) = 1$$

Então é verdade que a *medição menos esp*ecífica que seleciona b_m ou b_n, que tem ambos os átomos feixe transmitido, tem um resultado com a maior probabilidade:

$$\mathcal{P}(a_i, b_m) + \mathcal{P}(a_i, b_n)$$

Esse é o resultado da *medição menos específica* e que tem a *maior probabilidade* $\Sigma_m \mathcal{P}(a_i, b_m) = 1$.

No caso da medida B, quando ela for apenas A, supondo também que $b_m = a_j$,

$$\mathcal{P}(a_i, a_j) = \begin{cases} 1 \Leftrightarrow a_i = a_j \\ 0 \Leftrightarrow a_i \neq a_j \end{cases} \Rightarrow \delta(a_i, a_j)$$

Realmente,

$$\langle a_i|a_j\rangle\langle a_j|a_i\rangle = [\delta(a_i, a_j)]^2 = \delta(a_i, a_j)$$

Que tipo de números são os tal que está neste intervalo e não é um número negativo ou complexo. Existem duas possibilidades:

i) $\langle a_i|b_m\rangle \in \mathbb{R}\ e\ \langle a_i|b_m\rangle = \langle b_m|a_i\rangle \therefore \mathcal{P}(a_i, b_m) = [\langle a_i|b_m\rangle]^2 \geq 0$

Automaticamente, $\mathcal{P}(a_i, b_m) \leq 1$ desde que a soma de todas as *probabilidades não negativas* seja igual a *1*. Na verdade, um esquema apenas com números reais, no qual não existe número ao quadrado igual a -1, não funciona.

ii) $\langle a_i|b_m\rangle \in \mathbb{C}\ e\ \langle b_m|a_i\rangle = \langle a_i|b_m\rangle^* \therefore \mathcal{P}(a_i, b_m) = [\langle a_i|b_m\rangle]^2 \geq 0$

A construção de probabilidades como quadrados absolutos fornece um nome para os números complexos $\langle a_i|b_m\rangle$: *amplitude de probabilidade*. Representa, portanto, a *amplitude de probabilidade* de ir de um estado qualquer para outro. É fácil verificar que se *operador* X é dado por $|x_i\rangle\langle x_j|$ então seu conjugado

$$X = |x_i\rangle\langle x_j| \Rightarrow X^* = |x_j\rangle\langle x_i|$$

Devido ao Axioma 4

$$(\langle x_j|)(X|x_i\rangle) = (\langle x_j|X)(|x_i\rangle) \equiv \langle x_j|X|x_i\rangle$$

Portanto, para o *operador hermitiano* X

$$\langle x_j|X|x_i\rangle = \langle x_i|X|x_j\rangle^*$$

Teorema 6

Os autovalores de um operador X hermitiano são reais, os autokets de X correspondentes aos diferentes autovalores são ortogonais.

Seja

$$X|x_1\rangle = x_1|x_1\rangle$$

Por hipótese,gott X é *hermitiano*, então

$$\langle x_2|X = x_2^*\langle x_2|$$

Aqui x_1. x_2, x_3,...são os autovalores de X. Multiplicando a primeira por a esquerda

$$\langle x_2|X|x_1\rangle = \langle x_2|x_1|x_1\rangle$$

Multiplicando a segunda por a direita e subtraindo

$$\langle x_2|X|x_1\rangle = x_2^*\langle x_2|x_1\rangle$$

$$\langle x_2|x_1|x_1\rangle - x_2^*\langle x_2|x_1\rangle = x_1\langle x_2|x_1\rangle - x_2^*\langle x_2|x_1\rangle = (x_1 - x_2^*)\langle x_2|x_1\rangle = 0$$

Os valores x_1 e x_2 podem ser iguais ou diferentes. Supondo que são diferentes

$$(x_1 - x_2^*) = (x_1 - x_2)$$

Não são nulos, então

$$\langle x_2|x_1\rangle = 0$$

O que prova a ortogonalidade. O teorema garante a realidade dos *autovalores* sempre que o *operador* for *hermitiano*.

Em relação a medição, é fato que sempre faz com que o sistema salte para um estado próprio da variável dinâmica que está sendo medida. Isso significa que antes que uma *medição do observável* A seja feita, o sistema é assumido como representado por alguma combinação linear dos *kets*

$$|\alpha\rangle = \sum_i c_{a_i}|a_i\rangle = \sum_i |a_i\rangle\langle a_i|\alpha\rangle$$

Quando a *medição é realizada*, o sistema *assume um dos autoestados* do *observável* A, por exemplo $|a_i\rangle$, ou seja

$$|\alpha\rangle \overset{medida\ de\ A}{\rightarrow} |a_i\rangle$$

É instrutivo considerar o caso da partícula com *spin* S como na experiência de SG, representando na base *ket* $|S,+\rangle$ ou $|S,-\rangle$ por exemplo, quando um átomo de prata com uma orientação de spin arbitrária mudará para qualquer S. Portanto, *uma medição geralmente muda o estado* (como mostrado nos parágrafos anteriores). A única exceção é quando o estado já está em um dos *autoestados do observável* sendo medido, caso em que

$$|a_i\rangle \overset{medida\ de\ A}{\rightarrow} |a_i\rangle$$

Quando a medição faz com que $|\alpha\rangle$mude para $|a_i\rangle$, diz-se que A é medido como a_i. É nesse sentido que o resultado de uma *medição* produz um dos *autovalores do observável* sendo medido.

O *estado de um sistema físico* antes da *medição*, não permite saber com antecedência em qual dos vários $|a_i\rangle$ o sistema será definirá como *resultado da medição*, dado por

$$|\alpha\rangle = \sum_i c_{a_i}|a_i\rangle = \sum_i |a_i\rangle\langle a_i|\alpha\rangle$$

No entanto, a *probabilidade* ou mais corretamente, a *amplitude de probabilidade*, de saltar para algum $|a_i\rangle$ em particular é dada por

$$\mathcal{P}(|a_i\rangle) = |\langle|a_i\rangle|\alpha\rangle|^2$$

Embora o comentário seja sobre um único sistema físico, para determinar essa *amplitude de probabilidade* empiricamente, deve-se considerar um *grande número de medições realizadas em um conjunto*; isto é, uma coleção de sistemas físicos preparados de forma idêntica, todos caracterizados pelo mesmo *ket* $|\alpha\rangle$.

A interpretação da *amplitude de probabilidade* para o quadrado do produto interno $(\langle a_i|\alpha\rangle)^2$ é uma postulação fundamental da Mecânica Quântica. Refletindo sobre isso para um caso extremo, onde um suposto estado *ket* $|a_i\rangle$ resultado da *medição* para ser igual a 1, que é justamente esperado. Realizando novamente a *medição* de A, é obtida claro, apenas $|a_i\rangle$; pois as *medições repetidas* e sucessivas do mesmo *observável* produzem o mesmo resultado. Se, por outro lado, estamos interessados amplitude de probabilidade do sistema inicialmente caracterizado por $|a_i\rangle$ assumir algum outro *autoket* $|a_j\rangle$ com $a_i \neq a_j$, então a *amplitude de probabilidade* se anula devido a ortogonalidade entre os *kets.*

Do ponto de vista da *teoria da medição*, *kets* ortogonais correspondem mutuamente a alternativas exclusivas como por exemplo no caso dos *spins*, se o sistema está em $|S,+\rangle$ certamente não estará em $|S,-\rangle$. Além disso, as *probabilidades* para as várias possibilidades alternativas devem totalizar a unidade. Ambas as expectativas são atendidas pela *amplitude de probabilidade* para $\mathcal{P}(|a_i\rangle)$.

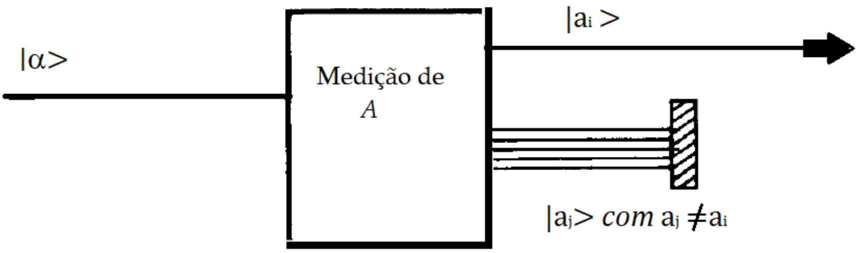
O *valor esperado* (não é *autovalor*) do *observável* A tomado em relação ao estado $|\alpha\rangle$

$$\langle A \rangle = \langle \alpha | A | \alpha \rangle$$

Para ter certeza de que estamos nos referindo ao estado $|\alpha\rangle$, pode-se usar uma a notação $\langle A \rangle_\alpha$ para simplificar; mas $\langle A \rangle = \langle \alpha | A | \alpha \rangle$ é uma definição; no entanto, concorda com a noção intuitiva de *valor médio medido* porque pode ser escrita como

$$\langle A \rangle = \sum_i \underbrace{a_i}_{\substack{valor \\ medido}} \overbrace{|\langle a_i | \alpha \rangle|^2}^{\substack{probabilidade \\ de\ obter\ a_i}}$$

Para esclarecer ainda mais o significado das *medições na Mecânica Quântica*, usa-se a noção de uma *medição seletiva*, ou *filtro*. No parágrafo III.1 foi considerado o arranjo do experimento de SG. Esse experimento permite o uso de um bloqueio para um dos componentes e dessa forma apenas um dos componentes de spin sai do aparelho, como na figurinha



Medida seletiva

Matematicamente, podemos dizer que tal medida seletiva equivale a aplicar o *operador* $|a_i\rangle\langle a_i|$ sobre $|\alpha\rangle$, ou seja $|a_i\rangle\langle a_i|\alpha\rangle$.

Então, é possível apresentar algumas conclusões essenciais:

i) A propriedade de composição das funções transformação e sua interpretação em *amplitudes de probabilidade* implicam que a álgebra de medição pode ser realizada como um conjunto de *operadores lineares em um espaço complexo* com métrica *hermitiana*.

ii) Com cada estado máximalmente filtrado (isto é, puro) é caracterizado pelos números quânticos, a_i , associado associar um vetor *ket* $|a_i\rangle$ e um vetor dual *bra* $\langle a_i|$, onde o conjunto $\{|a_i\rangle\}$ é uma base ortonormal do espaço vetorial e $\{\langle a_i|\}$ é uma base ortonormal do espaço vetorial dual.

iii) A *medição* é um *operador projeção* $|a_i\rangle\langle a_i|$ sobre o estado $|\alpha\rangle$, sendo *operador hermitiano* correspondendo ao *observável* A, onde $|a_i\rangle$ é o *autoket de* A cujo *autovalor* é a_i.

iv) Somente *operadores hermitianos* com um conjunto completo de *autokets* podem ser candidatos a *observáveis*.

v) A álgebra dos observáveis e o produto escalar entre estados (as *probabilidades*) são invariantes sob transformações unitárias (uma afirmação aqui feita sem demonstrar) e como consequência *operadores unitários* formam um *grupo*.

vi) Como qualquer *ket* pode ser definido a partir de outro por uma *combinação linear de símbolos de medição*, todos os *kets* devem ter significado físico, ou seja, corresponder aos *estados físicos* (GOTTFRIED, 2018,p.302, 2018).

3. CONCLUSÃO

Em uma extensão muito maior do que normalmente percebemos, nossa imagem da Física e da *medição* está condicionada pelos textos científicos. Na Física principalmente, mas também bem em todas as outras áreas da Ciência, a discordância sobre os *fundamentos* é, como a busca por *inovações básicas*, reservada para os períodos de crise. O estudo dos procedimentos de confirmação da maneira como são praticados é, portanto, frequentemente, o estudo do que os cientistas irão ou não desistir para obter outras vantagens particulares. Ao fazer isso, percebeu-se que os processos quânticos relativos à natureza da matéria são radicalmente diferentes daqueles associados as teorias clássicas previamente existente. No entanto, apesar dessa diferença extrema, foi possível à primeira vista concluir que os resultados clássicos são meramente uma forma limitante dos resultados quânticos, ou em outras palavras, que os conceitos clássicos são logicamente um caso especial dos conceitos quânticos.

Foi investigada essa relação entre os conceitos clássicos e quânticos mais detalhadamente, a fim de mostrar que a fundamentação quântica em sua forma atual realmente pressupõe a correção dos conceitos clássicos; portanto os conceitos clássicos não podem ser considerados formas limitantes dos conceitos quânticos, mas, em vez disso, devem ser combinados com os conceitos quânticos de modo a permitir uma descrição completa, de forma que um complemente o outro.

Então é a partir da *medição* que adquirimos as descrições completas sobre um estado ou fenômeno (objeto de medição) no mundo ao nosso redor. Isso significa que uma *medição* deve ser descritiva em relação ao estado ou objeto que estamos medindo: deve haver uma relação entre o objeto de medição e o resultado da medição. A descritividade é um aspecto necessário, mas não o suficiente da *medição*: quando alguém lê um livro, reúne informações, mas não realiza uma medição. A *medição* é, e deve ser, objetiva. O resultado da *medição* deve ser independente do observador arbitrário.

O artigo procurou então mostrar uma tentativa de formular claramente como as *medidas físicas* surgem do processo experimental evidenciando o contexto de aplicabilidade matemática na Ciência, a partir da algebrização do procedimento de *medição,* descrevendo uma *estrutura matemática* sobre quantidades não-evasivas que por um lado, tem interpretação física direta e, por outro é tão forte que suporta um resultado a que corresponde, estudando sua manipulação formal como um ramo da Matemática. Dessa forma o objetivo do artigo foi descreve como são feitas as correspondências entre o formalismo matemático e os resultados de *medições específicas* tanto a nível macroscópico quanto a nível microscópico.

Macroscopicamente, há pouca confusão sobre como é feita a correspondência entre o *formalismo matemático* usado para descrever *sistemas* e as *medições* que são realizadas sobre esses sistemas. Microscopicamente, a formulação mais detalhada aparece na Mecânica Quântica devendo satisfazer o requisito de consistência necessária na descrição das interações que constituem os *processos de medição*, reproduzindo as caracterizações simbólicas que surgiram neste estágio elementar. Essas considerações fazem referência explícita ao fato de que toda *medição de fenômenos atômicos* envolve, em última análise, a ampliação dos *efeitos microscópicos* ao nível da *observação macroscópica*.

Acredito que o artigo[15] fornece dessa forma uma possível maneira para a apresentação da temática ligada aos *processos de medição e construção das grandezas* envolvidas.

REFERENCIAS

BERKA, Karel. *Measurement: its concepts, theories, and problems*. Dordrecht: Springer, 1983.

BOHM, D. *Quantum Theory*. New York: Dover Pu, 1989.

BOURBAKI, N.. *Théories spectrales*. New York: Springer Science & Business Media, 1967.

_____.. *Topological vector spaces*. New York: Springer Science & Business Media, 2003.

BRIDGMAN, P.W. *The Logic of Modern Physics*. NewYork: The Macmillan Co., 1958.

BUCHDAHL, H. A.. *An introduction to Hamiltonian optics*. New York: Dover, Pu., 1993.

BUNGE, M. *Filosofia da física*. Tradução de Rui Pacheco. Lisboa: Edições 70, 1973

_____. (Ed.). *The methodological unity of science*. Boston: Springer Science & Business Media, 1973.

_____. A mathematical theory of the dimensions and units of physical quantities, *in Problems in the Foundations of Physics*. Berlin: Springer, 1971.

DARRIGOL. Ol.. Number and measure: Hermann von Helmholtz at the crossroads of mathematics, physics, and psychology, *Stud. Hist. Phil. Sci*. vol 34, p. 515, 2003.

DE BOER, J.. On the history of quantity calculus and the international system. *Metrologia*, v. 31, n. 6, p. 405, 1995.

DIRAC, P. A.M. A new notation for quantum mechanics. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 35, nº 3, p.416, 1939.

_____.. *The principles of quantum mechanics*. Oxford: Oxford University Press, 1981.

DOEBELIN, E. O.; MANIK, D. N. *Measurement systems: application and design*. New Delhi (India): Tata McGraw Hill Education, 2007.

FEYNMAN, R.P. The Feynman Lectures on Physics. *Vol. III: The New Millennium Edition: Quantum Mechanics*. New York: Basic Books, 2015.

_____.. The Feynman Lectures on Physics: Commemorative Issue. *Quantum Mechanics*.vol.3. New York: Addison Wesley, 1989.

_____.. Space -time approach to non-relativistic quantum mechanics. *Reviews of Modern Physics*, vol. 20, nº2, p.71, 1948.

FINKELSTEIN, L; LEANING, M.S. A review of the fundamental concepts of measurement. *Measurement*, vol 2 nº1, p.25, 1984.

GERLACH, W.; STERN, O.. Der experimentelle nachweis der richtungsquantelung im magnetfeld, *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, v. 9, nº 1, p. 349, 1922.

GOTTFRIED, K.. *Quantum mechanics*, vol. 1. London: CRC Press, 2018.

GOLDSTEIN, H.. *Classical Mechanics*. 2.ed.rev. New York: Addison Wesley, 1980.

GRASSMANN, H.. *Lehrbuch der Mathematik für höhere Lehranstalten*. Berlin: Verlag Th. Chr. Fr. Enslin, 1861.

HEGENBERG, L.. *Etapas da investigação científica*: leis, teorias, método. São Paulo: EPU- EDUSP, 1976.

HELENE, O. A. O que é uma medida. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 13, p.12, 1991.

HELMHOLTZ, H.n von. *Counting and measuring*. Translated by C. L. Bryan; intr. and notes by H. T. Davies. New York: D. Van Nostrand, 1930.

HÖLDER O. Die Axiome de Quantitat und Lehre vom Mass, Ber. Verhy *Sachs. Ges. Wiss. Leipzig. Math Phys* K1, nº 53, p.1, 1901.

KRANTZ, D. H.; LUCE, R. D.; SUPPES, P.. *Foundations of Measurement.* Volume I: Additive and Polynomial Representations. New York: Dover Publications, 2006.

_____.. *Foundations of measurement*: Additive and polynomial representations. San Diego: Academic Press, 2007.

LANCZOS, C.. *The variational principles of mechanics*, 4. ed. NewYork: Dover, Pu., 1986.

LEECH, J. W.. *Mecânica analítica.* Tradução de Carlos Campos de Oliveira. Rio de Janeiro: Livro Técnico, 1971.

LEMOS, N. A. *Mecânica analítica*. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

LODGE, A.. *Mensuration for senior students.* London: Logman, 1895.

MARTINS, R. A. A visão operacional dos conceitos e medida física. *Revista de Ensino de Física,* v. 4, p. 57, 1982.

MAXWELL, J. C.. *Electricity and magnetism*. New York: Dover, 1954.

MILIES, F. C. P.; COELHO, S. P.. *Números:* uma introdução à matemática. Edusp, 2001.

PEEBLES, P. J.s E. *Quantum Mechanics*. Princeton: Princeton University Press, 1992.

SAKURAI, J. J.. *Modern quantum mechanics*. New York: Addison-Wesley Pu. Co. Inc., 1994.

SCHWINGER, J.. *Quantum Kinematics and Dynamics*. New York: CRC Press 2000.

_____.. *Quantum mechanics: symbolism of atomic measurements*. New York: Springer; 2001.

_____.. The algebra of microscopic measurement. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, v. 45, nº 10, p. 1542, 1959.

THOMSON, W.. Electrical units of measurement, *Popular Lectures and Addresses*, vol.1, p.73, 1889.

VIM 2012. *Vocabulário Internacional de Metrologia: Conceitos fundamentais e gerais e termos associados.* Tradução JCGM 200:2012. 3.ed. 2012 Duque de Caxias: INMETRO. Rio de Janeiro, 2012.

VON HELMHOLTZ, H.. Numbering and measuring from an epistemological viewpoint. *Epistemological writings*, p. 72. Dordrecht: Springer, 1977.

_____.. Ueber die physikalische Bedeutung des Prinicips der kleinsten Wirkung. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, v. 1887, nº 100, p. 137, 1887.

_____.. *Zählen und Messen, erkenntnistheoretisch betrachtet*. Vienna: Springer, 1998.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

FORNASINI, P.. *The uncertainty in physical measurements: an introduction to data analysis in the physics laboratory*. New York: Springer Science & Business Media, 2008.

GUM 2008- Avaliação de dados de medição: Guia para a expressão de incerteza de medição- GUM 2008. Rio de Janeiro: INMETRO/CICMA/SEPIN, 2012.

PECHULA, M. R.. A ciência nos meios de comunicação de massa: divulgação de conhecimento ou reforço do imaginário social?. *Ciência & Educação* (Bauru), v. 13, nº 2, p. 211, 2007.

ABSTRACT

All of the sciences physical, biological, and social have a need for quantitative measurement. The article seeks to establish the formal foundations for measurement, justifying the assignment of numbers to objects in terms of their structural correspondence. The fundamental idea is that measurements are not the same as the attribute being measured. The measurement shows that strong assumptions are required to provide meaningful information about reality and encourages people to think about the meaning of their data. It encourages critical assessment of the assumptions behind the analysis. It encourages responsible real-world data analysis. Mathematical statistics is concerned with the connection between inference and data. The measurement concerned with the connection between data and reality and pointing to some aspects related to the process of algebrization" in order to approach its elaboration context in more detail

KEYWORDS:
experiment and measurement, measurement theory, physical quantity, macroscopic and microscopic measurement algebra, observable, measuring instruments.

NOTAS

[1] *Medição* é o processo de obtenção experimental de um ou mais valores que podem ser razoavelmente atribuídos a uma grandeza. A *medição* não se aplica a *propriedades qualitativas*. A *medição* implica na comparação de grandezas e engloba contagem de entidades. Portanto a *medição* pressupõe uma descrição da grandeza que seja compatível com o uso pretendido de um *resultado de medição*, de um *procedimento de medição* e de um *sistema de medição* calibrado que opera de acordo com um procedimento de medição especificado, incluindo as *condições de medição*, *in* JCGM 100:2008.

[2] Propriedade de um fenômeno, de um corpo ou de uma substância que pode ser expressa quantitativamente sob a forma de um número e de uma referência. O conceito genérico de *grandeza* pode ser dividido em vários níveis de conceitos específicos. Uma *grandeza* é um escalar. Entretanto, um vetor ou um tensor cujas componentes são grandezas, são também considerados como *grandeza* conforme VIM, 2012.

[3] von HELMHOLTZ, 1887; para uma tradução von HELMHOLTZ, 1977; DARRIGOL, 2003.

[4] Essa ideia provisória de *medição* surgiu como o processo de atribuição de *números* para representar propriedades (côr do cabelo); mas é possível perceber que *número* aqui é usado indiferentemente para o que seria mais correto, o *numeral.*

[5] Bureau International de Poids et Mesures e no Brasil, o INMETRO.

[6] As condições de funcionamento de referência ou prescrita servem para avaliar o desempenho do instrumento de medição, no qual a incerteza na medida específica é a menor possível, *in* IEC60050-300.

[7] É originário do indu- europeu *me* → *mes, menso, mesura* e as conhecidas palavras: medida, mensurar, etc. A palavra *medida* por sua vez é originária do hebraico *midá*, assim se algo está medido, teremos *medud* e se temos um *medidor*, teremos um *moded* (Exodo 36,15; Is 40,12; Ez 42,16). A semelhança das línguas hindu- européias e o hebraico é puramente casual, mas nada impede a existência de uma influência provocada por dominações e atividade comercial.

[8] O conceito de *número* é o de *número inteiro*.

[9] Criação de uma ocorrência ou evento.

[10] Maxwell(1954) apresenta a seguinte definição: *Toda expressão de uma quantidade (grandeza) consiste de dois fatores ou componentes. Um desses é o nome de certa quantidade conhecida da mesma espécie, como a quantidade a ser expressa, que é tomada como padrão de referência. O outro componente é o número de vezes que o padrão deve ser tomado afim de compensar a quantidade necessária. A quantidade padrão é tecnicamente chamada de unidade e o número é o valor numérico da quantidade*.

[11] A *medida* ou *medição* é o processo de obtenção experimental de um ou mais valores que podem ser razoavelmente atribuídos a uma *grandeza* ou ainda, a *medição* implica na comparação de grandezas e engloba a contagem de entidades, pressupondo a descrição da grandeza compatível com o uso pretendido de um resultado da *medição*, operando de acordo com um procedimento específico incluindo as condições arbitrárias.

[12] Sistema de unidades, baseado num dado sistema de grandezas, em que a unidade de medida para cada grandeza derivada é uma unidade derivada coerente. Exemplo: Conjunto de unidades SI coerentes e as relações entre elas (VIM 2012).

[13] NIST: National Institute of Standards and Technology.

[14] A ideia é análoga ao caso dos condutores elétricos, conhecido como *poder das pontas*, uma propriedade dos condutores de concentrar cargas elétricas em suas extremidades pontiagudas, o que provoca aumento da intensidade do campo elétrico.

[15] O leitor interessado poderá aprofundar o assunto e até mesmo completá-lo, consultando principalmente o excelente texto do criador da álgebra dos processos de medida microscópicos Julian Schwinger (SCHWINGER, 2001 e 2000) e os artigos do mesmo autor aqui citados; os textos de Hermann von Helmholtz (HELMHOLTZ, 1930); Paul Adrien Maurice Dirac (DIRAC, 1981); Jun John Sakurai (SAKURAI, 1994); Richard P. Feynman (FEYNMAN, 1989); Kurt Gottfried (GOTTFRIED, 2018); Phillip James E Peebles (PEEBLES, 1992); Karel Berka (BERKA, 1983); Mario Bunge (BUNGE, 1973 e BUNGE, 1971); Paul Bridgman (BRIDGMAN, 1958) e Robert D. Luce, Patrick Suppes e David H Krantz (LUCE, SUPPES e KRANTZ, 2007) entre outros.