

TESTANDO OS FUNDAMENTOS DA TEORIA RELATIVIDADE GERAL: UM EXPERIMENTO NO IPECI – UNISANTOS

ANTONIO TADEU F. AMADO*

* Físico (PUCSP).
Professor Titular de
Física Geral-Curso
de Matemática
e Engenharia.
Universidade Católica
de Santos - Santos SP-
Brasil.

RESUMO

Um cientista que está familiarizado com outras teorias físicas nas quais os símbolos com os quais lida são dotados de um significado experimental direto deve ter muito cuidado e paciência no estudo da Relatividade Geral. No início lógico da Teoria da Relatividade, encontramos, em vez disso, apenas dois conceitos elementares: a ideia de coincidências no espaço-tempo (*eventos*) e o *tempo próprio*; isso é tudo que existe em nosso equipamento para a longa jornada do completo entendimento da Gravitacão. Todas as outras grandezas físicas, distância, ângulo, energia etc, têm apenas um significado secundário e devem ser construídas, se possível, a partir dos dois conceitos fundamentais; portanto, uma teoria completa de medições é necessária. O *Princípio da Equivalência* historicamente desempenhou um papel importante no desenvolvimento da Teoria da Gravitacão. Isaac Newton considerou este *princípio* como tal, a pedra angular da Mecânica que ele dedicou ao parágrafo inicial dos *Principia* [Newton, 2002], afirmando na Definição I: *esta quantidade que Eu quero dizer daqui em diante em todos os lugares sob o nome de ... massa ... é conhecido pelo peso ... pois é proporcional ao peso, como descobri em experimentos com pêndulos, feito com muita precisão ...* Em 1907, Einstein usou o *princípio* como elemento fundamental da Relatividade Geral.

Em 2014, este projeto foi proposto a uma equipe de alunos de IC envolvendo esse teste experimental clássico da Teoria da Relatividade Geral de Einstein, conhecido como *Experimento de Galileu para o Princípio da Equivalência Fraco* e teve a finalidade de determinar o *coeficiente de Eötvös*, um parâmetro experimental relevante na determinação das variações da razão entre a *massa inercial* e a *massa gravitacional*, um *fundamento* não da gravidade newtoniana ou da Relatividade Geral, mas da ideia mais ampla de que *o espaço-tempo é curvo*.

PALAVRAS -CHAVE

Experimento de Galileu. Princípio da Equivalência Fraco. massa inercial e a massa gravitacional. Coeficiente de Eötvös.

1.

Em 2014, dois estudantes (EM) bolsistas ICEM-CNPq do Instituto de Pesquisas Científicas e o primeiro estudante do programa Caça Talentos do curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Católica de Santos, desenvolveram um projeto envolvendo as áreas de Relatividade e Gravitação, Metrologia, Instrumentação e Técnicas Gerais de Laboratório. O objetivo do projeto foi introduzir os estudantes nas bases do desenvolvimento histórico da Teoria da Relatividade Geral, envolvendo a verificação experimental clássica conhecida como *Experimento de Galileu para o Princípio da Equivalência Fraco* (Apolinário da Silva, Souza Silva e Ponce Silva, 2014, 2015) e teve a finalidade de determinar o coeficiente de Eötvös, um parâmetro experimental relevante na determinação das variações da razão entre a *massa inercial* e a *massa gravitacional* igualdade que é a sustentação entre efeitos gravitacionais e inerciais, portanto entre a *inércia* e a *gravitação* dando sustentação ao Princípio da Equivalência, que fundamentou a Teoria da Relatividade Geral de Einstein. Para tanto optou-se pela construção de dois pêndulos não clássicos, mas de formato cilíndricos (ôcos), um de Cu (cobre) e outro de Al (alumínio) para avaliar qual o nível de credibilidade desse tipo de montagem para a determinação do coeficiente de Eötvös correspondente, cuja tarefa experimental consistiu em determinar as possíveis variações da relação entre a *massa inercial* e a *massa gravitacional* para diferentes corpos.

A proposta procurou dar continuidade e contribuir para o debate sobre o ensino de Física Moderna no Ensino Médio, e deu prosseguimento a um projeto desenvolvido em 2004 por Maria Josineide Cunha (Cunha, 2004) que discutiu uma estratégia de ensino e atualização de professores de Física. Retomar o projeto é completar a fundamentação teórica, a qual foi suprimida do trabalho dos estudantes, devido as dificuldades matemáticas inerentes.

A Teoria da Relatividade de Einstein inicia a partir da elaboração do Princípio da Equivalência. Esse princípio representa o fundamento da teoria em que os privilegiados referenciais galileanos e newtonianos, ou seja, aqueles definidos a partir do *princípio da Relatividade de Galileu* e as incompatibilidades entre a Teoria da Gravitação Universal de Isaac Newton e a Teoria da Relatividade Restrita, adequadamente generalizado, chamado por Einstein de *hipótese de equivalência física completa*.

Então, este artigo, tem como objetivo fazer um fechamento do projeto analisando o problema que surgiu com a primeira definição newtoniana nos *Principia* (Newton, 1999; Newton, 2002). Procura chamar a atenção também para a importância de sua inserção no ensino de Física definitivamente e a necessidade dos professores de qualquer nível envolverem seus alunos. É recomendável a leitura dos excelentes artigos de Otávio Castellani (Castellani, 2001), R. Machado (Machado, Tort e Zarro, 2021) e de Bruto Max Pimentel Escobar (Acevedo, Morais, e Pimentel, 2019).

Não há desculpas para não inserir os temas de Física Moderna na programação do ensino Médio e Superior, em que o componente curricular de Física está presente. Estou me referindo sobre a necessidade da Teoria da Relatividade e a Mecânica Quântica não poderem estar ausentes da formação básica e o desenvolvimento desses projetos e esta complementação foi a melhor forma de introduzir os estudantes curiosos com o mundo maravilhoso de uma das teorias mais belas desenvolvidas pelo gênero humano apesar da resistência das escolas, embora existam bases para mudanças curriculares há muito tempo (Ostermann e Cavalcanti, 1999; Ostermann e Moreira, 1999; Ostermann e Moreira, 2000), além de uma infinidades

de trabalhos envolvendo a construção de materiais didáticos, *projetos de formação de professores* que se propõe fornecer a estrutura para a reconstrução curricular trazendo aos alunos a Física do séc. XX.

2.

As leis físicas são geralmente estabelecidas em relação a algum referencial, o que permite que grandezas físicas como velocidade, aceleração, etc., sejam definidas. Preferidos entre os referenciais são os rígidos, e preferidos entre eles os inerciais. O termo referencial foi cunhado no séc. XIX, mas tem uma longa pré-história, começando, talvez, com o surgimento da Teoria Copernicana. O ponto significativo não foi a substituição da Terra pelo Sol como o centro de todo o movimento no universo, mas o reconhecimento da Terra e do Sol como meros pontos de vista possíveis a partir dos quais os movimentos dos corpos celestes podem ser descritos.

O estudo de Galileu Galilei e Isaac Newton se aplicam a esses *referenciais especiais*. Com base nisso, o conceito de Relatividade do Movimento, a constância da aceleração na queda livre, bem como a sugestão da igualdade do que no presente é denominado de *massa inercial* e *massa gravitacional* foram estabelecidos por Galileu Galilei (1564- 1642). Os conceitos são apresentados, não como costumeiramente aparece em muitos manuais de Física; aparecem na forma de *diálogos* (ao estilo platônico) entre dois personagens: *Salviati* (que representa o próprio Galileu), *Sagredo* e o filósofo peripatético *Simplicio*. Aparecem na *Terceira e Quarta Jornadas* de sua obra publicada em 1638, *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche, intorno a due nuove scienze* (Galileu, 1988) a partir de *princípios e teoremas*. Qualquer *referencial inercial* (ou referencial galileano) deve se mover *uniformemente* (isto é, com velocidade vetorial constante e sem rotação) em relação a qualquer outro referencial. Posteriormente foi possível verificar que as Leis de Newton são *invariantes* em relação a esses *referenciais*; mas não o são em relação a *referenciais em movimento relativo não uniforme*; ou seja, não seriam satisfeitas em ambos os referenciais. Consequentemente, a classe dos *referenciais inerciais* consiste precisamente no referencial básico formado pelo *Sol e estrelas fixas*, mais todos os outros referenciais imaginários movendo-se uniformemente em relação àquele. Empiricamente, o *referencial das estrelas fixas* foi por muito tempo reconhecido como *inercial* com considerável precisão e foi considerado o *referencial básico para as leis de Newton*. Hoje, sabendo que nossa galáxia gira e o Universo se expande, podemos substituir as *estrelas fixas* por aquela estrutura rígida na qual todas as outras galáxias parecem retroceder radialmente, ou seja, *a estrutura que é simétrica em relação para o universo distante*. Quando falamos da *moldura das estrelas fixas*, devemos realmente nos referir a esta última.

As Leis de Newton como afirmado antes, são válidas em todos os *sistemas inerciais*. Na Mecânica Racional de Newton, todos esses *referenciais inerciais* têm *extensão espacial e temporal infinita*, ou seja, x, y, z, t variam de menos a mais infinito. Associados a dois sistemas cartesianos ortogonais, $S(x, y, z, t)$ e $S'(x', y', z', t')$ numa configuração padrão

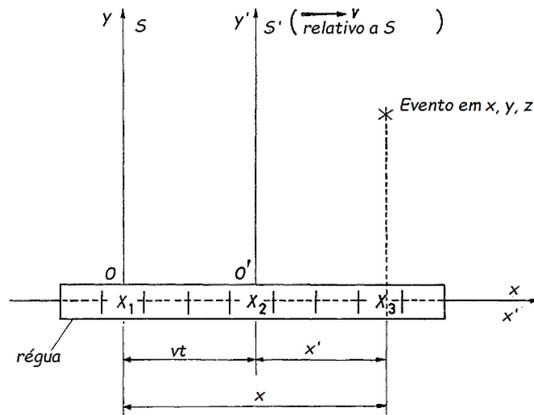


Fig. 1

Para comparar as coordenadas x de um evento em S e S' , imagine uma régua disposta ao longo do eixo x comum, conforme mostrado na fig.1, a régua pode se mover em relação a S e S' . Como para Galileu e Newton o tempo era absoluto, os observadores em repouso em S e S' , respectivamente, irão registrar sempre a concordância do instante em que um evento acontece, ou seja $t=t'$. Nota-se pela descrição da figura que os eventos sempre concordam para y e z (que na figura está oculto). Então, também $y=y'$ e $z=z''$. Mas entre x e x' essa coincidência não ocorre, as medidas serão

$$(2.1) \quad X_1X_3 = X_1X_2 + X_2X_3 \Leftrightarrow x = OO' + x'$$

$$x' = x - OO' \Rightarrow x' = x - vt$$

Segue então que as transformações entre S e S' , são

$$(2.2) \quad \begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' + vt \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$$

É facilmente verificável que as Leis de Newton são válidas, ou seja $\vec{F} = \vec{F}'$. A aceleração aparece como *absoluta*, ou seja, *invariante* e nessa caso ela é medida com o mesmo valor para observadores em S e S' . Tanto Newton como Galileu ilustram a situação usando o famoso e familiar exemplo do navio, no qual podem ocorrer todos os movimentos e todos os acontecimentos mecânicos, estando ele em repouso ou em *movimento uniforme*. Essa propriedade da Mecânica newtoniana é denominada de *Relatividade newtoniana* (ou galileana).

Mas é bom refletir um pouco sobre essa situação. A força \vec{F} não é sempre medida a partir da aceleração produzida como mostra a Lei II de Newton. Faço aqui uma observação, creio que importante, pois na verdade Isaac Newton nunca estabeleceu matematicamente a Lei ou Axioma II do Movimento como um *algoritmo das fluxões*, na forma conhecida por qualquer estudante de Ensino Médio. A Lei ou Axioma II do Movimento afirma apenas que \vec{F} *x* *variação da quantidade de movimento* ocorrida num intervalo de tempo Δt . A primeira pessoa a apresentar a forma equacionada conhecida atualmente parece ter sido Jacob Hermann (1678 - 1733), um matemático e ex- aluno de Jacob Bernoulli, que trabalhava com Mecânica Clássica. Ela aparece em seu livro *Phoronomia, sive De viribus et motibus corporum solidorum et fluidorum libri duo* em 1716 [Hermann, 2018] onde escreve

$$(2.3) \quad G = \underbrace{m}_{\frac{dp}{dv}} : dt$$

Visto que Newton distingue claramente entre Definições e Axiomas (ou Leis do Movimento), é óbvio que o Axioma II do Movimento não foi concebido por Newton como uma definição de força, embora às vezes seja interpretada como tal por escritores modernos sobre os Fundamentos da Mecânica. Nem pretendia ser apenas a declaração de um método de medição de força. Força, para Newton, era um conceito dado a priori, intuitivamente e, em última instância, em analogia ao esforço muscular humano [Jammer, 2011]. A expressão, segundo a tradição de Hermann, $\vec{F} = m\vec{a}$, apresenta uma forma interessante de medida do *coeficiente de inércia* do corpo representado por m , também denominada de *massa inercial* m_i . Imaginando por exemplo um corpo suspenso por uma mola ou cordão elástico, a força de atração gravitacional é oposta à força de restauração da mola ou elástico. Se o corpo está em repouso, não é conveniente medir a força elástica em termos de uma aceleração. As forças atuantes são

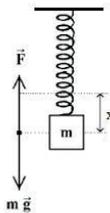


Fig. 2

Na mecânica newtoniana, a equação $\vec{F} = \vec{F}'$ é estendida a todos os tipos de forças; por exemplo, assume-se que a força devida à atração gravitacional, conforme a Proposição 75 – Teorema 35, Livro I dos *Principia* é

$$(2.4) \quad \vec{F} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{d^2} \frac{\vec{d}}{|\vec{d}|} \equiv m \cdot \underbrace{\left(-G \frac{M}{d^2} \frac{\vec{d}}{|\vec{d}|} \right)}_{\vec{g}} = m \cdot \vec{g}$$

O resultado final é o que denominados *peso* do corpo. Aqui G é uma constante universal, a *constante gravitacional*, d é a distância de separação entre as massas m e M , onde M é a *massa gravitacional ativa*, salientando que a massa M e campo gravitacional não podem ser separados, o *campo é inerente a massa e a massa é inerente ao campo*, é ativa por ser a causa da perturbação gravitacional; m é a *massa gravitacional passiva* (Dicke; Krotkov and Roll, 1964) Devido a *simetria* da Lei da Gravitação não existe nenhuma diferença essencial entre a massa gravitacional *ativa* e a *passiva*. É invariante da mesma forma, assume-se que as forças elásticas também são invariantes. Como foi visto a aceleração é invariante, logo a equação força igual a massa vezes aceleração pode ser usada em qualquer referencial inercial, e sob essas condições o Axioma II de Newton é invariante sob uma transformação Galileana.

A partir dessas considerações, aplicando o Axioma II e a Lei da Gravitação dada pela eq. (2.4) para o caso de um corpo em *queda livre* próximo a superfície da Terra

$$(2.5) \quad \vec{F} = -G \cdot \frac{M_g \cdot m_g}{d^2} \frac{\vec{d}}{|\vec{d}|} = m_i \vec{a} \therefore \vec{a} = -G \cdot \frac{M_g}{d^2} \left(\frac{m_g}{m_i} \right) \frac{\vec{d}}{|\vec{d}|}$$

A massa m_g é medida em função da *massa ativa* M_g

$$(2.6) \quad \vec{F} = -G \cdot \frac{M_g \cdot m_g}{d^2} \frac{\vec{d}}{|\vec{d}|} \Leftrightarrow F = |\vec{F}| = G \cdot \frac{M_g \cdot m_g}{d^2} \therefore m_g = \frac{F \cdot d^2}{G \cdot M_g}$$

Nesse caso, para que esse resultado obedeça ao princípio galileano de que a *aceleração na queda livre é a mesma para todos os corpos*, terá validade desde que $m_i = m_g$ sem restrição de generalidade (Nussenzveig, 1996)

$$(2.7) \quad \vec{a} = -G \cdot \frac{M_g}{d^2} \frac{\vec{d}}{|\vec{d}|} \equiv \vec{g}$$

Também por escolhas convenientes de G , num *referencial galileano* é possível verificar experimentalmente que todos os corpos caem com a mesma aceleração. Considerando dois corpos de massas inerciais $m_i(1)$ e $m_i(2)$ na altura h próximos a superfície da Terra, escalarmente para ambos os casos

$$(2.8) \quad \begin{aligned} F(1) &= -G \cdot \frac{M_T \cdot m_g(1)}{(R_T + h)^2} & m_i(1)a(1) &= -G \cdot \frac{M_T \cdot m_g(1)}{(R_T + h)^2} \\ F(2) &= -G \cdot \frac{M_T \cdot m_g(2)}{(R_T + h)^2} & m_i(2)a(2) &= -G \cdot \frac{M_T \cdot m_g(2)}{(R_T + h)^2} \end{aligned}$$

$$(2.9) \quad \frac{m_i(1)a(1)}{m_i(2)a(2)} = \frac{m_g(1)}{m_g(2)} \Rightarrow \frac{m_i(1)}{m_g(1)} = \frac{m_i(2)}{m_g(2)} \cdot \frac{a(2)}{a(1)}$$

Como comprovado por Galileu na Primeira Jornada de *Duas Novas Ciências* na fala de Salviati: *Tendo constatado isso, cheguei à conclusão de que, eliminando completamente a resistência do meio, todos os corpos desciriam com a mesma velocidade* (Galileu, 1988); de modo que $a(1) = a(2)$ dentro da precisão experimental, levando ao resultado

$$(2.10) \quad \frac{m_i(1)}{m_g(1)} = \frac{m_i(2)}{m_g(2)}$$

Portanto, a tarefa experimental consiste em verificar essa razão para diferentes partículas ou substâncias.

Isaac Newton percebeu a sutileza dessa razão e procurou verificá-la experimentalmente usando pêndulos de mesma massa gravitacional constituídos de substâncias diferentes (Newton, Livro III, 2002).

PROPOSIÇÃO VI – TEOREMA VI

Que todos os corpos gravitam em direção a todos os planetas e que os pesos dos corpos em direção a qualquer um dos planetas, a distâncias iguais do centro do planeta, são proporcionais às quantidades de matéria que eles contêm.

Em muitos aspectos, essa proposição é o centro e o cerne dos argumentos de Newton para a universalidade de sua lei da gravitação: *a igualdade universal das massas inercial e gravitacional*. Foi sua primeira preocupação na formulação de suas Leis ou Axiomas do Movimento; e para o qual ele realizou as primeiras medições de precisão com o pêndulo (descrito em detalhes no Escólio Geral no final da Seção VI do Livro II). A base teórica e conceitual do experimento foi estabelecida na Proposição XXIV do Livro II. O resultado mostrou que igualdade ocorria em uma parte em 10^3 (como no caso do experimento realizado por Apolinário, Souza e Ponce, mesmo com todas as alterações feitas).

Desde então, inúmeros experimentos e demonstrações tem sido repetido por meio de diferentes equipamentos experimentais, onde todas as repetições envolvem uma correspondência particular com as teorias correlacionadas. Esses experimentos concluem que exceto pela resistência do ar, todos os corpos caem com a mesma aceleração. A constância da aceleração da gravidade foi testada muitas vezes após a afirmação galileana e culminou com um conjunto de experimentos realizados entre 1889 e 1909 pelo físico húngaro Roland von Eötvös. No experimento derradeiro realizado juntamente com Dezsö Pekár (1873 -1953) e Jenő Fekete (1880 -1943), ele melhorou seus resultados para uma precisão da ordem de 10^9 , o qual apareceu pela primeira vez em 1909 como um ensaio que levou ao prêmio Benecke Trust Fund da Universidade de Goettingen, ele não foi publicado até 1922, três anos após a morte de Eötvös (Eötvös, 1922). O período em que o experimento foi realizado levou os físicos da época a acreditarem que o trabalho de Eötvös teve influência decisiva sobre Einstein durante a elaboração da Teoria da Relatividade Geral. Mas não. Einstein na verdade questionava a *constância da aceleração da gravidade*.

3.

No parágrafo anterior os resultados obtidos são uma consequência do Axioma III de Newton, e mostram que as *massas gravitacionais passiva e ativa* são iguais. Na teoria gravitacional moderna, entretanto, a *equivalência* ficou como uma questão em aberto. A etapa que leva a eq.(2.7), aparentemente trivial em que m é cancelado depende para a mesma substância, da *equivalência* da *massa gravitacional* no numerador e da *massa inercial* no denominador; e essa *equivalência* não é uma questão de pouca importância. Observe que esta aceleração g não depende da própria massa do objeto de teste ou de sua composição material. Como Galileu supôs quatrocentos anos atrás, todos os objetos caem com a mesma aceleração. Esse *princípio* pode parecer violado na experiência comum, mas quando o experimento é realizado no vácuo, a previsão é confirmada (como foi vividamente demonstrado quando o astronauta Dave Scott, na missão APOLO XV, na Lua em 1971, mostra um *martelo e uma pena de águia caindo ao mesmo tempo*, com a mesma variação de velocidade, na superfície lunar que não possui atmosfera, portanto sem a ação da resistência). Esses resultados estabelecem o que ficou conhecido como *Princípio da Equivalência Fraco* (PEF).

Os experimentos PEF foram tradicionalmente interpretados em termos newtonianos, ou seja, como pesquisas para possíveis desvios da igualdade exata de m_g/m_i para os corpos (1) e (2), especificando pelo *parâmetro* Eötvös (von Eötvös, Pekár, Fekete, 1922) $\eta \in \mathbb{R}$, um número adimensional, o qual é usado como uma medida da eventual violação do PEF, podendo ser definido como

$$(3.1) \quad \eta(1,2) \leq \left| \frac{a(1) - a(2)}{a(1) + a(2)} \right| = 2 \cdot \frac{|a(1) - a(2)|}{a(1) + a(2)}$$

Da eq. (2.8)

$$\begin{aligned}
 a(1) &= -G \cdot \frac{M_T \cdot m_g(1)}{m_i(1) \cdot (R_T + h)^2} \\
 a(2) &= -G \cdot \frac{M_T \cdot m_g(2)}{m_i(2) \cdot (R_T + h)^2} \\
 \eta(1,2) &\leq 2 \cdot \left| \frac{a(1) - a(2)}{a(1) + a(2)} \right| = 2 \cdot \left| \frac{-G \cdot \frac{M_T \cdot m_g(1)}{m_i(1) \cdot (R_T + h)^2} + G \cdot \frac{M_T \cdot m_g(2)}{m_i(2) \cdot (R_T + h)^2}}{-G \cdot \frac{M_T \cdot m_g(1)}{m_i(1) \cdot (R_T + h)^2} - G \cdot \frac{M_T \cdot m_g(2)}{m_i(2) \cdot (R_T + h)^2}} \right| \\
 \eta(1,2) &\leq 2 \cdot \left(\frac{-G \cdot \frac{M_T}{(R_T + h)^2}}{-G \cdot \frac{M_T}{(R_T + h)^2}} \right) \left(\frac{\frac{m_g(1)}{m_i(1)} - \frac{m_g(2)}{m_i(2)}}{\frac{m_g(1)}{m_i(1)} + \frac{m_g(2)}{m_i(2)}} \right) \therefore \\
 (3.2) \quad \eta(1,2) &\leq 2 \left| \frac{\left(\frac{m_g}{m_i}\right)(1) - \left(\frac{m_g}{m_i}\right)(2)}{\left(\frac{m_g}{m_i}\right)(1) + \left(\frac{m_g}{m_i}\right)(2)} \right|
 \end{aligned}$$

Resultado adotado por Dicke (Dicke, Krotkov, Roll, 1964). Considerando uma certa interação x , assumida para dar contribuições diferentes para a massa inercial e massa gravitacional passiva dos corpos de teste (1) e (2), de modo que levando em conta a relação entre massa e energia interna E de cada corpo, prevista na Teoria da Relatividade Restrita

$$\begin{aligned}
 (3.3) \quad m_g(1) &= m_i(1) + \sum_x \eta(x) \frac{E_x(1)}{c^2} \\
 m_g(2) &= m_i(2) + \sum_x \eta(x) \frac{E_x(2)}{c^2}
 \end{aligned}$$

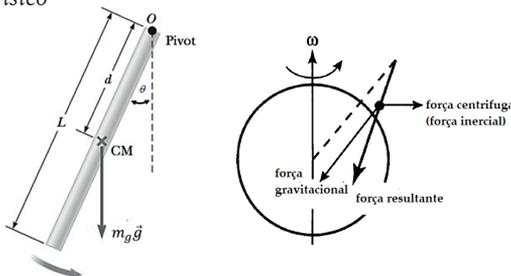
O coeficiente de Eötvös para essa interação, mantida a igualdade (Cook, Chen, 2005) será

$$(3.4) \quad \eta(1,2) = \sum_x \eta(x) \left(\frac{E_x(1)}{m_i(1) \cdot c^2} - \left(\frac{E_x(2)}{m_i(2) \cdot c^2} \right) \right)$$

Esse resultado experimentalmente relaciona os corpos (1) e (2) às energias das diferentes interações.

A maioria dos experimentos para testar o PEF foram realizados usando o pêndulo simples (incluindo o pêndulo rígido ou composto), com substâncias mais ou menos comuns, o equilíbrio de torção (incluindo o pêndulo de torção), corpos em queda livre e o equilíbrio químico. Os experimentos com uso do pêndulo para o PEF são de interesse apenas histórico devido as limitações de precisão, mas ainda é bastante instrutivo por considerar os possíveis erros a que tal dispositivo elementar está sujeito, mesmo que apenas como um aviso ao usar outros mais sensíveis.

O experimento que foi realizado pela equipe de alunos usou não um pêndulo comum mas o *pêndulo físico* (Apolinário da Silva, Souza Silva, Ponce Silva, 2014, 2015) o qual teve como base o estudo de (Potter, 1923), e nesse caso é interessante considerar a equação do movimento do *pêndulo físico*



O pêndulo em questão é uma barra (corpo rígido) de que oscila livremente em torno do eixo Z (perpendicular ao plano da folha) que contém o ponto O, sob a ação da gravidade, constituindo assim um pêndulo físico. Se L é comprimento da barra cuja secção transversal S que pode ser desconsiderada, tem volume SL , sua massa inercial $m_i = \rho SL$, o momento de inércia em relação à O é dado por

$$I = \frac{1}{3}m_i L^2$$

Considerando que o raio de giração do corpo é $K^2 = \frac{1}{3}L^2$ (K representa a distância ao eixo em que toda a massa poderia ser considerada sem variar o momento de inércia)

$$I = m_i K^2$$

Se a linha $OC=L/2=d$ ($C \equiv$ Centro de Massa da barra), o faz um ângulo θ com a vertical do lugar, a componente Z do torque que atuante é

$$(3.5) \tau_z = m_g g \cdot d \sin \theta$$

Se o momento angular do corpo em questão em relação a Z é dado por

$$(3.6) \ell_z = -I \cdot \ddot{\theta}$$

Assim (3.5) com (3.6) leva a equação do movimento do pêndulo é

$$m_i K^2 \ddot{\theta} = -m_g g \cdot d \sin \theta$$

$$(3.7) \quad \ddot{\theta} + \frac{m_g}{m_i} \cdot \frac{gd}{K^2} \sin \theta = 0$$

No limite $\theta \ll 1$, pequenos ângulos de deflexão, $\sin \theta \simeq \theta$ (solução linear da equação diferencial)

$$(3.8) \quad \ddot{\theta} + \frac{m_g}{m_i} \cdot \frac{gd}{K^2} \theta = 0$$

A frequência angular será então

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{m_g}{m_i} \cdot \frac{gd}{K^2}} \quad \therefore T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m_i}{m_g} \cdot \frac{K^2}{g \cdot d}}$$

$$(3.9) \quad T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m_i}{m_g}} \cdot \sqrt{\frac{K^2}{g \cdot d}}$$

Então, se dois pêndulos (1) e (2) tem o mesmo comprimento L , mas são feitos de substâncias diferentes, a diferença dos quadrados dos períodos é

$$T^2(1) - T^2(2) = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m_i}{m_g}} \cdot \sqrt{\frac{K^2}{g \cdot d}}$$

Como

$$\eta_{(1,2)} \leq 2 \left| \frac{\left(\frac{m_g}{m_i}\right)_{(1)} - \left(\frac{m_g}{m_i}\right)_{(2)}}{\left(\frac{m_g}{m_i}\right)_{(1)} + \left(\frac{m_g}{m_i}\right)_{(2)}} \right|$$

$$\eta_{(1,2)} \leq 2 \left| \frac{\left(\frac{K^2}{gd} \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\right)_{(1)} - \left(\frac{K^2}{gd} \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\right)_{(2)}}{\left(\frac{K^2}{gd} \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\right)_{(1)} + \left(\frac{K^2}{gd} \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\right)_{(2)}} \right|$$

$$\eta_{(1,2)} \leq 2 \left[\frac{\left(\frac{1}{T(1)}\right) - \left(\frac{1}{T(2)}\right)}{\left(\frac{1}{T(1)}\right) + \left(\frac{1}{T(2)}\right)} \right]$$

$$(3.10) \quad \eta_{(1,2)} \leq 2 \left| \frac{T(1) - T(2)}{T(2) + T(1)} \right|$$

O *parâmetro de Eötvös* pode ser determinado com o uso de pêndulos de substâncias diferentes (Cook, Chen, 2005). Como a *sensibilidade* do dispositivo foi definida como a menor aceleração que o dispositivo pode detectar se o ruído do sistema for negligenciado; de modo geral, ele não determina a precisão real do aparelho, pois o nível de ruído do oscilador linear pode definir um limite superior para uma menor aceleração mensurável, a *sensibilidade* pode ser combinada com o nível de ruído. Nesse caso para do pêndulo de período T , comprimento L que oscila com uma amplitude θ (Cook, Chen, 2005) tem a verdadeira incerteza no período determinada pela precisão de localizar o instante em que o pêndulo passa por sua posição de repouso, de modo que se $\Delta\theta$ é a incerteza na posição angular e n o número de oscilações em que o período é medido

$$(3.11) \quad \frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta\theta}{n \cdot \theta}$$

Se forem realizadas no mínimo 100 oscilações, pode-se obter uma incerteza em boas medições com variações angulares da ordem de 10^{-10} rad. Os *pêndulos reais* diferem dos *pêndulos simples* de várias maneiras, sendo necessário que se leve em conta o efeito causado pelas dimensões do *bulbo*, das correntes de ar, da temperatura além do efeito produzido no ponto de suspensão.

Experimentos como esse que envolvem a medição de forças e acelerações são extremamente difíceis de realizar com precisão suficiente. No entanto pode-se fazer isso comparando a força gravitacional da Terra com a *força centrífuga* devido à rotação da Terra, *que é puramente efeito inercial*. Em princípio, o pêndulo está na latitude local, não 0° nem 90° , e também não aponta para o centro da terra. Em qualquer caso, em algum ângulo intermediário, como o seguinte (fig. 3), vai apontar em uma direção que é a *resultante da força gravitacional e da força centrífuga*. É possível então, comparar diferentes substâncias, verificando a *constância da razão da massa inercial para a massa gravitacional*, mas que não vai mostrar efeito algum, levando a concluir que a *razão das massas inerciais para as massas gravitacionais é uma constante*. Mesmo apenas com a finalidade didático- ilustrativa relativo ao estudo do *princípio* a equipe superou suas dificuldades e perseguiu a análise da linearidade da relação entre a *massa gravitacional e inercial* correspondente obtendo um resultado significativo para o coeficiente de Eötvös com uma precisão $n \leq 10^4$ com uma confiança de 68% [Apolinário da Silva, Souza Silva e Ponce Silva, 2014, 2015].

Na versão do experimento com a balança de torção Robert Dicke (1916-1997) (Dicke, Krotkov, Roll, 1964) e Vladimir Braginski (1931-2016) e Vladimi I. Panov (Braginsky and Pa-

nov, 1972) demonstraram que a linearidade da relação entre a massa gravitacional e inercial foi estabelecida em cerca de uma parte em 10^{12} , ou seja, a diferença nas relações entre a *massa gravitacional e a massa inercial* para diferentes materiais confirmaram com maior precisão os resultados nulos obtidos 60 anos antes por Eötvös. Nos últimos quase cinquenta anos, o monitoramento do sistema da Terra e da Lua com o Alcance do Laser Lunar (LLR), ver por exemplo (Bender, Dicke, et al, 1973; Williams, Turyshev, Boggs, 2009), e a medição realizada pelo grupo Eöt-Wash com um pêndulo de torção, atingiu os melhores limites de uma parte em 10^{13} (Wagner, Schlamminger, Gundlach, Adelberger, 2012). No entanto as medições no solo atingiram um limite em termos de relação sinal-ruído, tornando mais difícil uma medição melhor. Como consequência, outras medições fazendo uso de um interferômetro de nêutrons detectaram fases mecânico-quânticas induzidas por gravidade propondo como uma prova para realizar testes PEF, por exemplo, (Colella, Overhauser, Werner, 1975).

Outra solução para aumentar a precisão do PEF foi testá-lo no espaço: esse foi o objetivo da missão Microscope. Em 2016, o Centro Nacional de Estudos Espaciais (CNES), agência espacial da França, lançou o satélite Microscope, que se dedica a testar o princípio da equivalência. A equipe científica da missão, liderada por pesquisadores do French Aerospace Lab (ONERA) e do Côte d’Azur Observatory (OCA), também na França, já relatou seus primeiros resultados. Tirando vantagem do ambiente silencioso no espaço, a missão testou o PEF com uma precisão sem precedentes, não mostrando desvios das previsões do *princípio de Galileu-Newton* e a Teoria Relatividade Geral. Até o momento vale o *princípio*: todos os corpos devem cair na mesma taxa em um campo gravitacional, independentemente de sua composição [Touboul et al, 2017; Touboul et al, 2020].

Recentemente, em 2012 foi proposto o Teste de Satélite do Princípio de Equivalência (STEP) (Worden, Everitt, Overduin, Mester, 2012.) para testar o Princípio de Equivalência. O experimento é considerado sensível o suficiente para testar a teoria da gravidade e outras teorias de Einstein. Worden e Everitt propuseram realizar uma versão melhorada do experimento, colocando massas de diferentes composições dentro de um satélite orbitando a Terra para obter uma longa duração de queda livre.

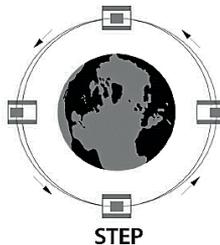


Fig. 4 - Princípio galileano da queda livre

Com sensibilidade posicional muito alta, pode ser alcançada resfriando o equipamento a 1,8 K e usando SQUIDS¹ para detectar mudanças de corrente nas bobinas de captação magnética. As massas de teste de diferentes materiais e o equipamento de medição de posição são colocados dentro do satélite e micro-propulsores newtonianos são usados para cancelar as pequenas acelerações do satélite devido à resistência do ar, pressão de radiação e vento solar que pode acoplar às massas. O STEP visa medir a Equivalência no nível de uma parte em 10^{18} . A configuração básica é a de um satélite livre de arrasto, onde uma camada externa em torno de uma massa de teste interna é usada para bloquear o vento solar, o arrasto atmosférico, o campo magnético da Terra e outros efeitos que podem perturbar o movimento de um objeto interno em queda livre. O Teste de Satélite do Princípio de Equivalência (STEP) é um

programa conjunto EUA-Europa para testar uma das idéias mais fundamentais de toda a Física, a *equivalência da massa gravitacional e inercial*. Para outras forças, a massa tem apenas uma função, como medida da inércia. Para a gravidade, também cumpre uma segunda função, como fonte de aceleração. Se o magnetismo tivesse sido a força motriz do experimento de Galileu, uma bola de vidro ou pedra certamente não teria caído com a mesma aceleração de uma bola de ferro. Newton, que primeiro fez este ponto crucial, distinguiu duas quantidades que provam ser *equivalentes* em gravitação, o *peso* de um corpo e a *quantidade de matéria* dele, ou como diríamos, *sua massa gravitacional* m_g e *massa inercial* m_i .

Esse tipo de discussão (bastante negligenciada no ensino de Física infelizmente) no entanto, serve para demonstrar o quão avançada era a Física feita por Galileu e Isaac Newton. Foi fato de que a *composição material está ausente de tais fenômenos* sugeriu a Einstein que a gravidade deve ser uma função do próprio espaço, e não da matéria particular que experimenta a força.

4.

Como foi comentado no §2, o trabalho de Eötvös não teve influência decisiva sobre Einstein durante a elaboração da Teoria da Relatividade Geral. Einstein na verdade questionava a *constância da aceleração da gravidade*. Em 1907 quando refletia sobre como a Teoria da Gravitação newtoniana seria modificada para que se ajustasse a Relatividade restrita, segundo seu próprio relato (Pais, 1995):

Eu estava sentado numa cadeira no Escritório de Patentes em Berna trabalhando num artigo síntese sobre a Relatividade Restrita, tive também que tentar modificar a teoria newtoniana da gravitação de modo que as suas leis se ajustassem a Relatividade restrita. Algumas tentativas nesse sentido mostraram-me que isso poderia ser feito, mas não me satisfaziam porque estavam baseadas em hipótese sem fundamento físico. Então me ocorreu o pensamento mais feliz da minha vida: o campo gravitacional tem uma existência relativa, de algum modo semelhante ao campo elétrico gerado por indução magnético-elétrica. Pois para um observador que cai livremente do telhado de uma casa, não existe, ao menos no ambiente imediato, um campo gravitacional. Na realidade se esse observador deixar cair alguns corpos, esses permanecerão em relação a ele, em estado de repouso ou movimento uniforme e o observador acreditará estar em repouso...O fato conhecido experimentalmente, de que a aceleração de queda ser independente em relação a matéria é, portanto, um argumento poderoso para o postulado da gravitação ser generalizado a sistemas de coordenadas que relativamente uns aos outros estão em movimento não uniforme.

A pergunta então é: Exige a Teoria da Relatividade a modificação da Lei da Gravitação de Newton? Essa lei universal tem em si mesma uma validade limitada e se aplica muito bem em situações praticamente estáticas como o caso da lei de Coulomb na Eletrostática, a qual falha para dar uma descrição adequada da interação entre cargas elétricas em movimento. A razão da falha neste caso é a concepção de *ação instantânea à distância*. Em 1845, Gauss reconheceu a falha e sugeriu uma modificação da Lei da Gravitação newtoniana, numa natural generalização da visão de força para definir uma *ação à distância* se propagando com uma velocidade finita, a velocidade da luz. Embora o problema tenha permanecido insolúvel para Gauss, foi ao mesmo tempo uma generalização matematicamente auto consistente² (Assis, 1992) da teoria newtoniana para quatro dimensões e a unificação do princípio da *ação à distância* e a *teoria do campo*. A *ação à distância* foi revista por Riemann (Riemann, 1867; Assis,

1992), (embora tenha sido criticada pelo físico polonês Rudolf Clausius (1822- 1888)) pelos físicos Hugo Tetrode (1895- 1931) e Adriann Fokker (1887-1972) (Assis, 1992) dando uma formulação matemática à ideia de Gauss.

Esses resultados mostram coerência com a exigência relativística de que a velocidade limite de um sinal é a *velocidade da luz* c . Por outro lado existem os aspectos problemáticos da igualdade entre a *massa inercial e gravitacional*, por outro lado o conceito relativístico de *massa-energia* sugerindo que no caso de partículas com *massa de repouso nula* como o *foton* mostrarão propriedades como a da massa (m_i e m_g). Então deve existir uma forma de incorporar esse fato numa teoria da gravitação.

Nesse caso seria interessante iniciar com os conceitos clássicos do *movimento relativo*. Um observador que vê um objeto se mover segundo uma trajetória curvilínea (não retilínea) dirá que isso acontece porque, de acordo com as Leis de Newton, existe uma força que atua sobre esse objeto. Um outro observador olha para o mesmo objeto e vê que este se desloca segundo uma trajetória retilínea, com *velocidade uniforme*, e que, portanto, novamente de acordo com as Lei de Newton, não está sujeito à ação de qualquer força. Será possível a concordância?

Sejam dois observadores, um fixo no *referencial inercial* S e outro fixo em *referencial não inercial* S' que se move com uma aceleração constante $a = g$ relativamente em relação ao *referencial inercial* S . O efeito pelo observador em S' será idêntico ao efeito sofrido por ele caso S' estivesse em repouso num campo gravitacional

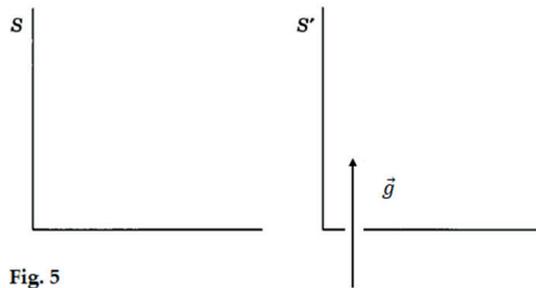


Fig. 5

Supondo que o movimento acelerado se faz ao longo do eixo $y-y'$, mantendo $x-x'$ sempre paralelos, portanto o plano $z-z'=0$. Usando aqui as transformações da *relatividade galileana*, eq. (2.2), a relação entre as coordenadas dos dois referenciais é dada por:

$$(4.1) \quad \begin{cases} x' = x \\ y' = y - \frac{1}{2}gt^2 \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

Consideremos agora um pulso de radiação (um *foton*) que se move com velocidade constante v no plano $z-z'=0$, paralelamente ao eixo $x-x'$ do *referencial inercial* S . em relação a esse referencial o sistema de equações fica

$$(4.2) \quad \begin{cases} x = vt \\ y = a \\ z = 0 \end{cases}$$

Aqui $a \in \mathbb{R}$, uma constante. Substituindo os valores em (4.1), mas lembrando da igualdade temporal

$$(4.3) \begin{cases} x' = vt' \\ y' = a - \frac{1}{2}gt'^2 \\ z' = 0 \end{cases}$$

Em (4.3) eliminando o parâmetro t' , aparece uma equação em x e y como o esperado

$$y' = a - \frac{1}{2}g \left(\frac{x'}{v}\right)^2 = a - \underbrace{\left(\frac{g}{2v^2}\right)}_{\alpha} x'^2 \therefore$$

$$(4.4) \quad y' = a - \alpha \cdot x'^2$$

Essa é a equação da *parábola* no plano $z'=0$ do referencial S' . Portanto, a trajetória que o observador S' vê é uma *parábola*.

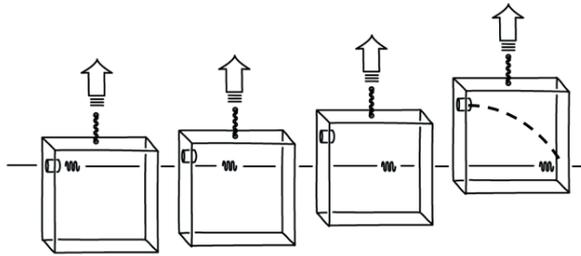


Fig. 6

Esse foi o *mais feliz pensamento da vida* de Einstein; e com um *experimento mental* ele solucionou o problema da *igualdade entre massa inercial e gravitacional*. Ele conclui que *todos os sistemas de referência S, S', etc, são equivalentes para a descrição da Natureza* (ou *para a formulação das leis gerais da Natureza*) *qualquer que seja seu estado de movimento*.

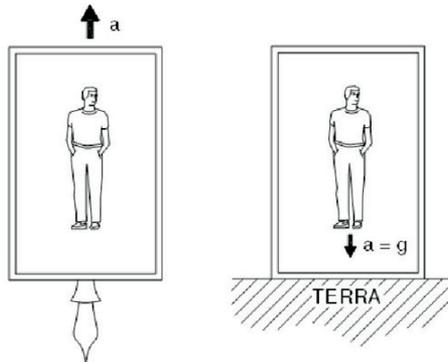


Fig. 7 Referencial sob aceleração $a = g$ é equivalente a gravidade.

POSTULADO [EINSTEIN, 1972].

As leis da física devem ter uma estrutura tal que a sua validade permaneça em sistemas de referência animados de qualquer movimento.

Voltando ao pulso de luz (o fóton), seja um observador no referencial não inercial S' , um elevador imaginário, a trajetória do pulso de luz tem direção perpendicular à aceleração

gravitacional, pelo Princípio da Equivalência, no instante t sofreu um deslocamento para cima $h = \frac{1}{2}gt^2$

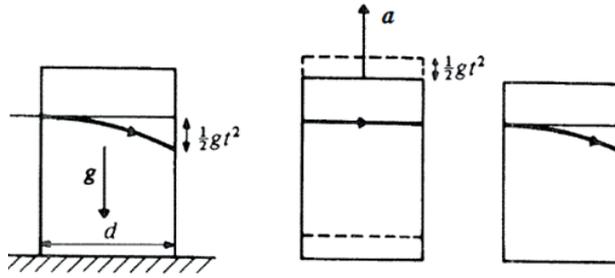


Fig. 8

Considerando que caminho de luz é aproximadamente a um arco circular de raio R . O comprimento da corda l através do círculo é

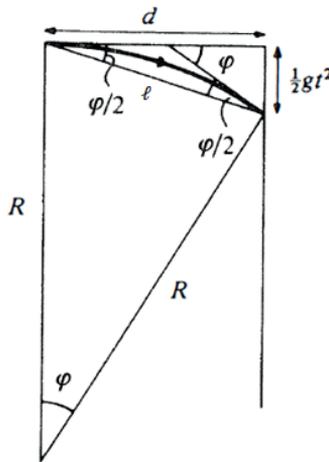


Fig. 9

$$l^2 = h^2 + d^2 = \left(\frac{1}{2}gt^2\right)^2 + d^2$$

$$l^2 = \frac{1}{4}g^2t^4 + d^2$$

Da geometria do diagrama

$$\varphi \cong \frac{l}{R} \Rightarrow \varphi^2 \cong \frac{l^2}{R^2} \therefore R^2 \cong \frac{l^2}{\varphi^2}$$

Então

$$R^2 \cong \frac{l^2}{\varphi^2} = \frac{\frac{1}{4}g^2t^4 + d^2}{\varphi^2}$$

Mas o ângulo $\varphi \ll 1^0$, pois $h \ll d$, de tal modo que da geometria do diagrama

$$\tan \varphi = \frac{h}{d} \Rightarrow \varphi = \tan^{-1} \left(\frac{h}{d} \right) \therefore \varphi \cong \frac{h}{d}$$

$$R^2 \cong \frac{\ell^2}{\left(\frac{h}{d} \right)^2} = \frac{\frac{1}{4} g^2 t^4 + d^2}{\frac{g^2 t^4}{d^2}} = \frac{d^2}{4} + \frac{d^4}{g^2 t^4}$$

$$R^2 \cong \frac{d^2}{4} + \frac{d^4}{g^2 t^4}$$

Mas como $h \ll d$ e $d = ct$

$$R^2 \cong \frac{d^2}{4} + \frac{d^4}{g^2 t^4} \Rightarrow R = \sqrt{\frac{d^2}{4} + \frac{d^4}{g^2 t^4}} = \sqrt{\frac{(ct)^4}{g^2 t^4} \left(\frac{g^2 t^4}{(ct)^2} + 1 \right)} = \frac{c^2 t^2}{gt^2}$$

$$(4.5) R \cong \frac{c^2}{g}$$

Assim, o raio de curvatura R da trajetória pulso de luz depende apenas da aceleração da gravidade local. Este argumento simples indica que, de acordo com o Princípio da Equivalência, a geometria do caminho da luz se propagando em um referencial acelerado (a moldura em que a gravidade local foi abolida) define a geometria do tecido espacial, que não é um espaço plano, mas um espaço curvo que depende do valor do *campo gravitacional local*. Tal argumento convenceram Einstein de que ele deveria levar a sério as *geometrias não euclidianas* (Amado, 2016) para derivar uma *teoria relativística da gravidade*.

Einstein também percebeu que o Princípio de Equivalência permitia compreender algumas coisas estranhas que acontecem em um campo gravitacional, como por que as frequências do espectro luminoso se aproximam do vermelho e que o ritmo de um relógio varia em função da altura no campo gravitacional.

Sejam dois *observadores inerciais* em movimento um em relação ao outro; as equações que expressam as coordenadas de espaço e tempo de um em termos de coordenadas de espaço e tempo do outro são chamadas de *transformações de Lorentz* (Amado, 2016) as quais satisfazem as condições impostas pela Teoria da Relatividade Especial. Essas condições incluem a *universalidade da velocidade da luz* (no espaço vazio). Elas também exigem que, se dois eventos estão localizados em uma linha perpendicular ao movimento relativo entre os dois observadores, e parecem ocorrer ao mesmo tempo para um observador, então eles parecerão simultaneamente para o outro observador também, e a distância entre eles parecerá ter o mesmo valor para ambos.

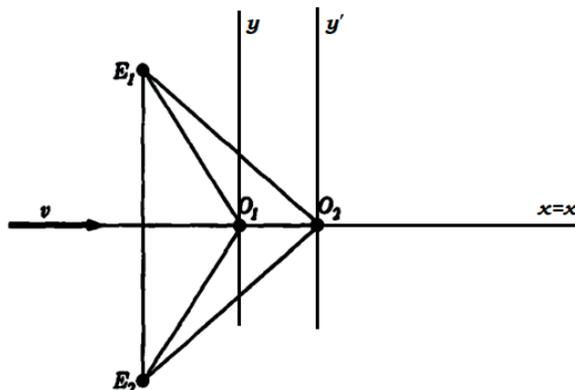


Fig. 10 Dois eventos *perpendiculares* a direção do movimento relativo

Suponha agora que, o segundo observador está em movimento se afastando em relação ao primeiro observador, com uma velocidade constante (MU) v na direção x positivo. Designando a medida de tempo desse observador por t' sua coordenada espacial na direção do movimento relativo por x' e as distâncias perpendiculares ao movimento relativo por r' ; um pulso luminoso no instante $t'=0$ na posição $x'=0$, onde $r'=0$, se propagará em todas as direções com velocidade c . Em outras palavras, este sinal se espalhará de forma que em qualquer momento t' , subsequente à sua emissão, alcançado todas as direções definindo uma superfície esférica de raio ct' de forma que a relação entre o tempo, as coordenadas espaciais e distâncias será

$$(4.6) \quad x'^2 + r'^2 = c^2 t'^2 \therefore c^2 t'^2 - x'^2 = r'^2$$

O mesmo sinal será visto pelo primeiro observador, no $t=0$, localização $x=0$, onde $r=0$;

$$(4.7) \quad c^2 t^2 - x^2 = r^2$$

Lembrando que r representa a distância perpendicular à direção do movimento relativo, então r e r' devem ser iguais em todos os instantes, tal que

$$(4.8) \quad c^2 t^2 - x^2 = c^2 t'^2 - x'^2$$

Essa relação deve valer para todas as combinações entre x' , t' , x , t ; contanto que se refiram ao mesmo conjunto de *eventos* ou *pontos universo* porque para qualquer combinação de t , x ou t' , x' , através dos quais se encontrar um valor de r ou r' de modo a satisfazer as condições apropriadas para um pulso luminoso espalhado. As relações entre as coordenadas devem ser para quaisquer dois eventos como as diferenças de coordenadas verificadas por um observador que devem determinar inequivocamente as diferenças de coordenadas determinadas pelo outro observador. Essas relações entre as diferenças de coordenadas são possíveis unicamente se as equações de transformações forem lineares, da forma (Amado, 2016)

$$(4.9) \quad \begin{aligned} x' &= k(x - vt) \\ t' &= mt - nx \end{aligned} ; k, m, n \in \mathbb{R}$$

Para o caso *newtoniano* em que o tempo é absoluto, $t'=t$, $k = m = n = 1$. Nesse caso essas transformações se aproximam das equações de transformação do caso *galileano* dadas pela eq. (2.2). Substituindo a eq. (4.9) em (4.8), obtemos

$$\begin{aligned} c^2 t^2 - x^2 &= c^2 (mt - nx)^2 - (k(x - vt))^2 \\ c^2 t^2 - x^2 &= c^2 m^2 t^2 - c^2 2 \cdot mt \cdot nx + c^2 n^2 x^2 - k^2 x^2 + 2 \cdot k^2 x \cdot vt - k^2 v^2 t^2 \\ c^2 t^2 - x^2 &= (c^2 m^2 - k^2 v^2) t^2 - 2tx \cdot (k^2 v - c^2 mn) - x^2 (k^2 - c^2 n^2) \end{aligned}$$

Comparando os polinômios

$$(4.10) \quad \begin{cases} c^2 = c^2 m^2 - k^2 v^2 \\ 1 = k^2 - c^2 n^2 \\ 0 = k^2 v - c^2 mn \end{cases} \Leftrightarrow (4.11) \quad \begin{cases} 1 = m^2 - k^2 \left(\frac{v}{c}\right)^2 \\ 1 = k^2 - c^2 n^2 \\ 0 = k^2 v - c^2 mn \end{cases}$$

Então do sistema (4.11)

$$k^2 - c^2 n^2 = 1 \Leftrightarrow k^2 = 1 + c^2 n^2 \Rightarrow \begin{cases} 1 = m^2 - k^2 \left(\frac{v}{c}\right)^2 \\ 0 = k^2 v - c^2 m n \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = m^2 - (1 + c^2 n^2) \left(\frac{v}{c}\right)^2 \\ 0 = (1 + c^2 n^2)v - c^2 m n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = m^2 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 + n^2 v^2 \therefore m^2 - n^2 v^2 = 1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2 \\ 0 = v + v c^2 n^2 - c^2 m n \therefore v = c^2 n(m - vn) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m^2 - n^2 v^2 = 1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2 \\ v = c^2 n(m - vn) \end{cases} \therefore (4.12) \begin{cases} (m - vn)(m + vn) = 1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2 \\ n = \frac{v}{c^2} \frac{1}{(m - vn)} \end{cases}$$

Mas

$$(m + vn) = m + vn - vn + vn = (m - vn) + 2vn$$

Substituindo na primeira das (4.12)

$$(m - vn)((m - vn) + 2vn) = 1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2 \Rightarrow (m - vn)^2 + 2vn \cdot (m - vn) = 1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2$$

Assim

$$(m - vn)^2 + 2v \frac{v}{c^2} \frac{1}{(m - vn)} \cdot (m - vn) = 1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2$$

$$(m - vn)^2 + 2 \frac{v^2}{c^2} = 1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2 \therefore$$

$$(m - vn) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Substituindo na segunda das (4.12)

$$n = \frac{v}{c^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Em

$$k^2 - c^2 n^2 = 1 \Rightarrow k^2 = 1 + c^2 \left(\frac{v}{c^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right)^2 \therefore$$

$$k = \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{v^2}{c^2}}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \sqrt{\frac{1}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$(4.13) \quad k = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Na equação do sistema inicial também

$$m^2 - n^2 v^2 = 1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2 \Rightarrow m^2 - \left(\frac{v}{c^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right)^2 v^2 = 1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2$$

$$m^2 = \left(1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) + \frac{\left(\frac{v}{c}\right)^4}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)\left(1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) + \frac{v^4}{c^4}}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^4\right) + \frac{v^4}{c^4}}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

$$(4.14) \quad m = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Dessa forma, nas equações de transformação originais (4.9)

$$4.15) \quad \begin{cases} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \\ t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \end{cases}$$

As eq. (4.15) são as *transformações de Lorentz*, que se forem consideradas as outras coordenadas espaciais, elas serão igualmente mantidas, $y=y'$ e $z=z'$ (Amado,2016).

Como é possível então medir a influência da gravidade sobre o ritmo dos relógios ou da medida de tempo? O ritmo tem uma frequência ν e apenas com uso das transformações de coordenadas adequadas, e neste caso as *transformações de Lorentz*, é que será possível entender o que vai ocorrer devido ao *Princípio da Equivalência* (Feynman, 2002).

Seja um referencial S' (que pode ser um elevador ou um foguete), onde estão identificados dois pontos A e B separados pela altura, separados pela altura h . Suponha que coloquemos um relógio no ponto A em relação e outro, idêntico no ponto B (aqui os relógios e os pontos serão identificados pela mesma letra).

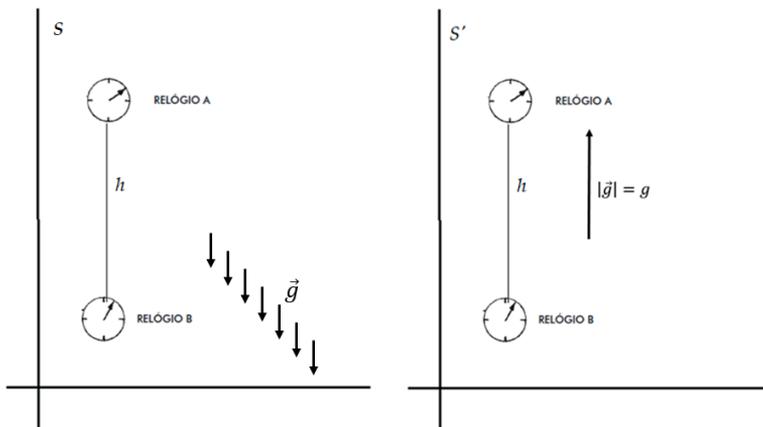


Fig. 11

Ambos os relógios A e B estão separados por uma distância h , no sistema S' e supostamente, o qual não está num campo gravitacional, mas o sistema está acelerado para cima

com $|\vec{g}| = g$ em relação ao sistema S . Quando um *pulso de luz* ou um *fóton* de frequência ν é emitido pelo relógio A (o ideal de medição são dois *pulsos por segundo*), o relógio está com uma velocidade v_0 nesse sistema. Quando o *fóton* atinge o relógio B para verificar a coincidência temporal, ele sofreu um deslocamento dl e está em movimento com velocidade $(v_0 + gdt)$, onde $dt = \frac{dl}{c}$. Dessa forma, devido ao movimento do sistema (o *fóton* se deslocou para baixo) quando o sinal atinge o relógio B o sistema ganhou velocidade $dv = gdt = g \frac{dl}{c}$ independente de v_0 . O relógio B tem tal velocidade com relação ao relógio A , no instante em que o sinal “cai”. Devido ao *Efeito Doppler -Fizeau* clássico em primeira ordem a frequência, então a variação fracionária da frequência será dada por

$$\frac{f + df}{f} = \frac{c + dv}{c} \equiv 1 + \frac{gdl}{c^2} \therefore$$

$$(4.16) \quad \frac{df}{f} = \frac{gdl}{c^2}$$

Como a aceleração g bem como o deslocamento dl são grandezas físicas vetoriais, o *produto escalar* define uma *função escalar* que é conhecida como *potencial gravitacional* φ

$$\vec{g} = -\nabla\varphi \quad \therefore \quad \vec{g} \cdot d\vec{l} = |\vec{g}| \cdot |d\vec{l}| = -d\varphi$$

Assim a eq. (4.16) será escrita como

$$(4.16a) \quad \frac{df}{f} = -\frac{d\varphi}{c^2}$$

Integrando sobre o todo o caminho do *fóton*

$$(4.17) \quad \frac{f}{f_0} = e^{-\left(\frac{\Delta\varphi}{c^2}\right)}$$

Mas como , então em primeira aproximação

$$(4.18) \quad f = f_0 \left(1 + \frac{gh}{c^2}\right)$$

Observa-se uma variação da frequência em B . A energia do *fóton* na absorção em B é sua energia inicial de emissão mais a energia ganha na transição de A para B (nota-se também que não é necessário usar a Mecânica Quântica). Uma importante conclusão é que no deslocamento através do campo gravitacional a *luz* adquire energia e frequência mas seu comprimento de onda *decrece*, o espectro se desloca *em direção a cor azul*, o que evidentemente significa que na fonte de emissão (mais alta no caso) há um deslocamento do espectro *em direção a cor vermelha*, o famoso *red-shift*, resultado da eq. 4.17. Usando o *efeito Mossbauer* com uma fonte de raios γ , medindo com cuidado excepcional para controlar as várias variáveis envolvidas Pound e Rebka do Laboratório Lyman da Universidade de Harvard (Pound, Rebka, 1959) detectaram um desvio relativo da frequência da ordem de 10^{15} (esta verificação permitiu um índice de verificação mais seguro quanto a esse fenômeno causado pela gravidade).

Pelo *Princípio da Equivalência* o resultado é o mesmo no sistema S que está imerso num campo gravitacional, embora nesse caso como A e B estão em repouso não há variação da frequência, mas o efeito é interpretado como um *efeito devido ao campo gravitacional*. Então um relógio na Terra está sempre atrasando em relação a um relógio absolutamente idêntico situado nas proximidades do Sol.

Esses fatos têm uma consequência que é de fundamental importância. Usando aqui a própria descrição de Einstein (Einstein, 1972), *para que se mantenha o critério de igualdade* o relógio em B tenha um *ritmo* mais lento por um fator $(1 + \frac{gh}{c^2})$ do que o do relógio em A. Na realidade a frequência do *foton* não é mais do que um relógio. Isso significa que os relógios funcionarão diferentes. Da eq.(4.18)

$$(4.19) \text{ ritmo de B} = \text{ritmo de A} \left(1 + \frac{gh}{c^2}\right)$$

Em outras palavras, um observador em S' concluirá que o *ritmo* (intervalo entre dois instantes) do relógio A é mais rápido do que o *ritmo* do relógio B. Pelo Princípio de Equivalência, o mesmo se passa em S sujeito ao campo gravitacional. Como neste caso, B está mais perto do corpo gravitacional do que A, conclui-se que *os relógios mais próximos da fonte de campo gravitacional tem ritmo mais lento do que os relógios mais afastados*. Há uma consequência desse fato: *a velocidade da luz não se comporta do mesmo modo que na Relatividade Restrita* (que foi verificado acima com o *desvio* no campo gravitacional).

Essa ideia leva a pensar sobre como é possível ir do ponto A até um ponto B na superfície da Terra de modo tal que o tempo medido por um relógio de posse do observador em movimento junto com o relógio seja máximo? Elevando o relógio A até a altura h e trazê-lo ao solo, onde se encontra o relógio B.

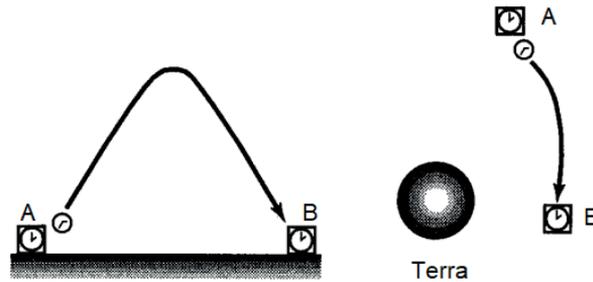


Fig.12

O tempo medido pelo relógio que se move é o *tempo próprio* t (que é definido na Relatividade Restrita). Em *queda livre*, a trajetória faz com que o *tempo próprio* seja máximo. Usando a eq. (4.18), o *excesso de ritmo* no relógio é dado por $\frac{v_0 gh}{c^2}$. Mas, devido a Relatividade Restrita, o movimento vai haver uma variação no *ritmo* dada por

$$(4.20) f = f_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \equiv f_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Mas

$$(1 + x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots$$

Para valores até primeira ordem, o efeito no ritmo do relógio será

$$(4.21) f \cong f_0 \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) \therefore -\frac{f_0 v^2}{2c^2}$$

Combinando os resultados das equações (4.18) e (4.21) tem-se o resultado entre as variações

$$(4.21) \quad \delta f = \frac{f_0 gh}{c^2} - \frac{f_0 v^2}{2c^2} = f_0 \left(\frac{gh}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2} \right)$$

A frequência do relógio em movimento sofre mudança, o que significa que, ao medir a variação de tempo em vários pontos do espaço é necessário comparar os ritmos de tempo com uma separação de tempo absoluta, definida em termos dos tempos próprios dt

$$(4.21) \quad \Delta\tau = \int_A^B \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(gh - \frac{v^2}{2} \right) \right] dt$$

$$\Delta\tau = (t_B - t_A) + \frac{1}{c^2} \int_A^B \left(gh - \frac{v^2}{2} \right) dt = \text{máximo}$$

O excesso de tempo é dado pela integral que deve ser *máximo*, mas para isso num intervalo de tempo fixo ($t_B - t_A$), é necessário que a integral no segundo termo seja *mínimo*. Multiplicando pelo valor da massa m do relógio e mudando o sinal

$$(4.22) \quad \delta t = -\frac{1}{mc^2} \int_A^B \left(\frac{mv^2}{2} - mgh \right) dt = \text{mínimo}$$

Portanto, em um campo gravitacional um objeto sempre se move de um ponto a outro de modo que um relógio, que segue a trajetória, marque o tempo mais longo entre todas as possíveis trajetórias. Assim a exigência para que o tempo próprio seja máximo é equivalente ao *Princípio da mínima ação* na Mecânica Clássica, um resultado que sugere como obter um *princípio mecânico relativístico* equivalente ao Axioma do Movimento II de Newton

$$\delta \int_1^2 d\tau \equiv \frac{1}{c} \delta \int_1^2 ds = 0 \quad \therefore \quad \delta \int_1^2 ds = 0$$

Um bom exemplo é o caso de um satélite de telecomunicações em órbita ao redor da Terra, onde se encontra uma pessoa em repouso com um relógio. Existem dois efeitos a serem considerados em relação à questão do *tempo real da informação* simultânea no tempo, quando os ritmos dos relógios, um na Terra e outro no satélite são comparados. A primeira coisa é que aceitando por hipótese que o tempo próprio do satélite é

$$\Delta\tau = \int \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} dt \quad \therefore \quad \Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

Então, existe um efeito devido ao movimento do satélite relativamente a Terra. Se f_0 for a frequência de um processo de medição sobre a Terra e $f_0 + \Delta f_1$ a frequência sinal informando o mesmo processo de medição no satélite em movimento com velocidade v ; assim dessa equação

$$\Delta t_s = \Delta t_T \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \cong \Delta t_T \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right)$$

Como f_0 é proporcional a t_r e $f_0 + \Delta f_1$ proporcional a t_s ; o aumento da frequência do relógio no satélite corresponde ao segundo termo no parêntesis (uso aqui um sub-índice para Δf para diferenciar esse 1º efeito do 2º efeito que será mostrado a seguir)

$$\frac{\Delta f_1}{f_0} = -\frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$$

Isto é, o relógio no satélite tem um *ritmo* mais lento do que o que está na Terra. Considerando que a massa do satélite de comunicações é m e a massa da Terra é M , da Teoria da Gravitação de Newton

$$\frac{m \cdot v^2}{r} = G \frac{m \cdot M}{r^2} \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{r} = \frac{GM}{r_0} \left(\frac{r_0}{r}\right) \therefore v^2 = \underbrace{g}_{\frac{GM}{r_0^2}} \cdot r_0 \cdot \left(\frac{r_0}{r}\right)$$

Então a variação da frequência do relógio no satélite

$$\frac{\Delta f_1}{f_0} = -\frac{1}{2} \frac{gr_0}{c^2} \cdot \left(\frac{r_0}{r}\right)$$

Mas, o relógio do satélite está a uma altura h , portanto em um potencial gravitacional maior do que o seu similar na superfície da Terra e conseqüentemente tem um *ritmo* mais rápido; assim de acordo com a eq.4.18, mas para o observador na Terra ela é escrita como

$$f_s = f_T \left(1 + \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right) \Rightarrow \frac{f_s - f_0}{f_0} = \frac{\Delta\varphi}{c^2} \therefore \frac{\Delta f_2}{f_0} = \frac{\Delta\varphi}{c^2}$$

Mas da Teoria da Gravitação

$$\Delta\varphi = - \int_{r_0}^r \frac{GM}{r^2} \cdot dr = -GM \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) \therefore \Delta\varphi = \frac{GM}{r_0} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)$$

Logo

$$\frac{\Delta\varphi}{c^2} = \frac{GM}{c^2 \cdot r_0} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \Rightarrow \frac{\Delta f_2}{f_0} = \frac{g}{c^2} \cdot r_0 \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)$$

Então somando $\frac{\Delta f_1}{f_0}$ com $\frac{\Delta f_2}{f_0}$ com obtém-se o valor total do aumento da frequência Δf (o efeito total) no satélite

$$\underbrace{\frac{\Delta f_2}{f_0} + \frac{\Delta f_1}{f_0}}_{\frac{\Delta f}{f_0}} = \frac{gr_0}{c^2} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) - \frac{1}{2} \frac{gr_0}{c^2} \cdot \left(\frac{r_0}{r}\right) = \frac{gr_0}{c^2} - \frac{gr_0}{c^2} \left(\frac{r_0}{r}\right) - \frac{1}{2} \frac{gr_0}{c^2} \cdot \left(\frac{r_0}{r}\right)$$

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{gr_0}{c^2} \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{r_0}{r}\right)\right]$$

É interessante verificar que se a altura do satélite é maior do que $r/2$ (normalmente 3.200 [km] acima do nível do mar) Δf será positivo, mas no caso de ser igual a essa altura predomina o valor de $\frac{\Delta f_1}{f_0}$ (um astronauta por exemplo, deve envelhecer menos do que uma pessoa na superfície da Terra).

5.

Poucos fatos na Ciência são mais surpreendentes e nenhum teve uma história mais longa do que a aparente *equivalência dos dois tipos de massa* na Física, a *gravitacional e inercial*. A partir do enunciado da *universalidade da queda-livre* por Galileu que chamou a atenção de I. Newton, propiciou a experimentação de Eötvös e a *reflexão maravilhosa* de A. Einstein, tem sido uma questão atraente tanto teórica quanto experimentalmente. O *Princípio da Equivalência* é um dos conceitos fundamentais da Teoria da Relatividade Geral desenvolvida por Einstein e mostra que os *efeitos de um campo gravitacional e de um campo de aceleração são, pois, os mesmos*, não existindo maneira de distinguir entre as duas situações acima descritas. Não há, portanto, desculpas para não inserir temas como esse nos programas do Ensino Médio e Superior nos dias de hoje. Repetindo, o ensino da Teoria da Relatividade bem como da Mecânica Quântica não pode estar ausente nesses níveis de ensino.

A busca da identidade do ensino de Física, torna claro a necessária preocupação em construir caminhos que facilitem a formação da cidadania dos envolvidos no processo educacional. Foi então crucial, propor este projeto sobre o *Princípio da Equivalência* com uso de pêndulos à equipe de estudantes, com a finalidade de determinar o *coeficiente de Eötvös*, os quais, em primeiro lugar apreenderam que o estudo dos *fundamentos* de uma área do conhecimento científico e sua experimentação com precisão, passa pelo *desenvolvimento* de equipamentos inicialmente simples até os mais sofisticados, que permitirão posteriormente a *transposição* para o *avanço tecnológico* e portanto a tão propalada *inovação*; o que difere muito propor projetos de *apelo imediato* que mais se assemelham com *cepas terceirizadas* sem grande significado de projetos maiores. Em segundo lugar, realizaram algo de valor inestimável tanto do ponto de vista do desenvolvimento das técnicas experimentais e medição, quanto pelo ponto de vista teórico, instigados a refletir e pensando os limites e as possibilidades desse conhecimento em suas formações e possibilitando o conhecimento de uma das questões mais fundamentais do nosso tempo, das conjunturas atuais e das perspectivas futuras.

REFERÊNCIAS

ACEVEDO, O. A., Moraes, E. M. e Pimentel, B. M. O Princípio de Equivalência, *Revista Brasileira de Ensino de Física* 41, nº 3, p. 2019

AMADO, A. T. F. *Matemática do Espaço-Tempo: a Teoria da Relatividade*. Santos: Leopoldianum, 2016.

APOLINÁRIO DA SILVA, L. H., SOUZA SILVA, J. C. e PONCE SILVA, D. *Experimento com o pêndulo simples e o Princípio da Equivalência Fraco*. Projeto apresentado ao IPECI da Universidade Católica de Santos, Santos, 2014- 2015.

_____; _____. O experimento de Galileu para o Princípio da Equivalência Fraco e a determinação do coeficiente Eötvös. 14º Congresso Nacional de Iniciação Científica CONIC-SEMES SP. Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

_____; _____. *Projeto, Construção e Calibração de dois pêndulos de massas diferentes para a determinação do coeficiente de Eötvös*. Jornada Científica do IPECI- Universidade Católica de Santos. Santos, 2015.

ASSIS, A. K. T. Teorias de ação a distância—uma tradução comentada de um texto de James Clerk Maxwell, *Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência* 7, p. 53, 1992.

BENDER, P.L., DICKE, R.H, CURRIE, D.G., POULTNEY, S.K., ALLEY, C.O., WILKINSON, D.T., ECKHARDT, D.H., FALLER, J.E., KAULA, W.M., MULHOLLAND, J.D. and PLOTKIN, H.H. The Lunar Laser Ranging Experiment: Accurate ranges have given a large improvement in the lunar orbit and new selenophysical information, *Science*, 182, nº 4109, p.229, 1973.

BRAGINSKY, V. B., PANOV, V. I. The equivalence of inertial and passive gravitational mass. *General Relativity and Gravitation* 3, nº 4, p.403, 1972.

CASTELLANI, O. C. Discussão dos conceitos de massa inercial e massa gravitacional. *Revista Brasileira de Ensino de Física* 23, nº 3, p. 356, 2001.

CHANDRASEKHAR, S.. *Newton's Principia for the common reader*. Oxford: Oxford University Press, 2002.

COLELLA, R., OVERHAUSER, A.W. and WERNER, S.A. Observation of gravitationally induced quantum interference, *Physical Review Letters*, 34, nº 23, p.1472, 1975.

COOK, A., Chen, Y. T. *Gravitational experiments in the laboratory*. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.

CUNHA, M. J. *Sobre o ensino de Física Moderna: uma proposta considerando a importância da Geometria*. TCC do Curso de licenciatura em Matemática, FFCL da Universidade Católica de Santos, 2004.

DICKE, R. H.; KROTKOV, P; ROLL, P.G. The Equivalence of Inertial and Passive Gravitational Mass, *Annals of Physics*, nº 26, p. 442, 1964.

EINSTEIN, A. *The meaning of relativity*. 5ª ed. Princeton: Princeton University Press, 1974.

EINSTEIN, A., LORENTZ, H. A., MINKOWSKI H. *Textos Fundamentais da Física Moderna: O Princípio da Relatividade*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbekian, Lisboa, 1972.

EÖTVÖS, L. On the Gravitation Produced by the Earth on Different Substances, *The Abraham Zelmanov Journal*, The journal for General Relativity, gravitation and cosmology, vol. 1, 2008.

FEYNMAN, R. P.; MORINIGO, Fernando B.; WAGNER, William G.; HATFIELD, Brian; PRE-SKILL, John and THORNE, Kip S. *Feynman Lectures on Gravitation*. Boca Raton: CRC Press, 2002.

GALILEI, G. *Diálogo sobre os Dois Máximos Sistemas do Mundo Ptolomaico & Copernicano*. Tradução, introdução e notas de Pablo Rúben Mariconda. 2. ed. São Paulo: Discurso Editorial, Imprensa Oficial, 2004.

_____. *Duas novas ciências*, 2.ed. Tradução e notas, Letizio Mariconda e Pablo R. Mariconda. São Paulo: Nova Stella Editorial; Rio de Janeiro: Museu de Astronomia e Ciências Afins, 1988.

HERMANN, J. *Phoronomia, sive de viribus et motibus corporum solidorum et fluidorum libri duo*. London: Forgotten Books, 2018.

JAMMER, M. *Conceitos de força: estudo sobre os fundamentos da dinâmica*. Rio de Janeiro: Contraponto, 2011.

MACHADO R. R., Tort A.C., Zarro C.A. Em busca de uma teoria da relatividade geral, *A Física na Escola*, 19, nº 2, p. 1, 2021

NEWTON, I. *Mathematical Principles of Natural Philosophy*. 3. ed. Translated by I. Bernard Cohen and Anne Whitman, with the assistance of Julia Budenz. Berkeley (USA): University of California Press, 1999.

_____. *Principia: Princípios matemáticos de Filosofia Natural I*, 3.. ed. Traduzido da edição em inglês de 1729, por Trieste Ricci, Leonardo Gregory Brunet, Sonia Terezinha Gehring e Maria Helena C. Célia, São Paulo: Edusp, 2002.

NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica: Mecânica* (vol. 1). São Paulo: Blucher; 1996.

OSTERMANN, F.; MOREIRA, M. A. Uma revisão bibliográfica sobre a área de pesquisa Física Mod-

- erna e Contemporânea no Ensino Médio, *Investigações em Ensino de Ciências*, vol. 5, n° 1, p. 23, 2000.
- OSTERMANN, F., CAVALCANTI, C. J. H. Física moderna e contemporânea no ensino médio: elaboração de material didático, em forma de pôster, sobre partículas elementares e interações fundamentais. *Caderno Catarinense de Ensino de Física*, v. 16, n. 3, p. 267, 1999.
- _____, MOREIRA, M. A. Física contemporânea en la escuela secundaria: una experiencia en el aula involucrando formación de profesores. *Revista de Enseñanza de las Ciencias*. Barcelona. 1999.
- OVERDUIN, J., EVERITT, F., WORDEN, P. and MESTER, J. STEP and Fundamental Physics. *Classical and Quantum Gravity*, 29, n° 18, p.184012, 2012.
- PAIS, A. *Sutil é o Senhor: a ciência e a vida de Einstein*. Rio de Janeiro: Nova Fronteira. 1995.
- POTTER, H. H. Some experiments on the proportionality of mass and weight. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, 104, n° 728, p. 588, 1923.
- POUND, R.V., REBKA Jr, G. A. Gravitational red-shift in nuclear resonance, *Physical Review Letters*, vol 3, n° 4393, p.439, 1959.
- RIEMANN, B. XLVII. A contribution to Electrodynamics, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, vol 34, n° 231, p.368, 1867.
- TORRETTI, R. *Relativity and geometry*. New York: Dover Pu. Inc., 1996.
- TOUBOUL, P., MÉTRIS, G., RODRIGUES, M., ANDRÉ, Y., BAGHI, Q., BERGÉ, J., BOULANGER, D., BREMER, S., CARLE, P., CHHUN, R. and CHRISTOPHE, B. MICROSCOPE mission: first results of a space test of the equivalence principle, *Physical Review Letters*, 119, n° 23, p.231101, 2017.
- TOUBOUL, P., MÉTRIS, G., RODRIGUESA, M., ANDRÉ, Y. and ROBERTD, A. The MICROSCOPE space mission to test the Equivalence Principle. *Comptes Rendus Physique*, 21, n° 2, p. 139, 2020.
- von EÖTVÖS, R., PEKÁR, D. and FEKETE, E.. Beiträge zum gesetze der proportionalität von trägheit und gravität. *Annalen der Physik* 373, n° 9, p. 11, 1922.
- WAGNER, T. A., SCHLAMMINGER, S., GUNDLACH, J. H., ADELBERGER, E. G. Torsion-balance tests of the weak equivalence principle. *Classical and Quantum Gravity*, 29, n° 18, p. 184002, 2012.
- WILLIAMS, J. G., TURYSHEV, S. G. , BOGGS, D. H. Lunar laser ranging tests of the equivalence principle with the earth and moon, *International Journal of Modern Physics D*, 18, n° 07, p.1129, 2009.

ABSTRACT

A scientist who is familiar with other physical theories in which the symbols one deals with are endowed with a direct experimental meaning must provide himself with great care and patience in studying general relativity. At the logical beginning of the theory of relativity we find instead only two elementary concepts: the idea of space-time coincidences (events) and the proper time; this is all there is in our equipment for the long journey to a complete understanding of *gravitation*. Every other physical quantity—distance, angle, energy, etc.—has only a secondary meaning and must be constructed, if possible, from the two fundamental concepts; hence, a full theory of measurements is needed. The principle of equivalence has historically played an important role in the development of gravitation theory. Newton regarded this principle as such a cornerstone of Mechanics that he devoted the opening paragraph of the Principia [Newton, 2002] to it, stating in Definition I: *this quantity that I mean hereafter everywhere under the name of... mass ... is known by the weight . for it is proportional to the weight, as I have found by experiments on pendulums, very accurately made* In 1907, Einstein used the principle as a basic element of General Relativity.

In 2014 This project proposed to a IC students team involving this classic experimental test of Einstein's Theory of General Relativity, known as the Galileo Experiment for the Principle of Weak Equivalence and had the purpose of determining the Eötvös coefficient, a

relevant experimental parameter in determination of variations in the ratio between inertial mass and gravitational mass, a foundation not of Newtonian gravity or General Relativity, but of the broader idea that *spacetime is curved*.

KEYWORDS

Galileo Experiment. Principle of Weak Equivalence. Inertial mass and gravitational mass. Eötvös Coefficient.

NOTAS

- ¹ Superconducting Quantum Interference Device, é um sensor de fluxo magnético bastante sensível, que combina dois fenômenos físicos: a quantização de fluxo em um anel supercondutor e o *efeito Josephson*. O Efeito Josephson é um efeito físico que se manifesta pela aparição de uma corrente eléctrica que flui através de dois supercondutores fracamente interligados, separados apenas por uma barreira isolante muito fina.
- ² Em 19 de março de 1845, Gauss envia uma carta para W. Weber (1804 -1891), referindo-se a especulações eletrodinâmicas com as quais tinha se ocupado muito antes, e que teria publicado se pudesse ter estabelecido então aquela que considerava a pedra angular verdadeira da eletrodinâmica, a saber, a dedução da força agindo entre partículas elétricas em movimento a partir da consideração de uma ação entre elas, não instantânea, *mas propagada no tempo, de uma maneira similar àquela da luz*.

AGRADECIMENTOS

O autor agradece penhoradamente a equipe do IPECI-UNISANTOS, em especial a diretora, Profa. Adriana Florentino de Souza, PhD e a técnica do Laboratório, Profa. Adriana Regina Stucchi, MSc; pela acolhida no Instituto e a liberdade com que nos permitiram trabalhar e afastando todos os entraves burocráticos.

