

O MÍNIMO TEÓRICO PARA COMPUTAÇÃO QUANTICA, A INOVAÇÃO DO SÉCULO XXI

ANTONIO TADEU F. AMADO*

* Físico (PUCSP) Professor Titular de Física Geral e Aplicada. Universidade Católica de Santos.

RESUMO

A Teoria Quântica é um avanço revolucionário na Física que emergiu no início do século XX. É uma elegante teoria matemática capaz de explicar o comportamento não intuitivo das partículas subatômicas, mais notavelmente o fenômeno do emaranhamento. No final do século XX, descobriu-se que a teoria quântica se aplica não apenas a átomos e moléculas, mas a bits e operações lógicas em um computador. Essa percepção trouxe uma revolução na ciência e tecnologia do processamento da informação, tornando possíveis tipos de computação e comunicação até então desconhecidos na Era da Informação.

PALAVRAS -CHAVE

inovação, computação, computação quântica.

ABSTRACT

Quantum theory is a revolutionary advancement in physics and chemistry that emerged in the early twentieth century. It is an elegant mathematical theory able to explain the counterintuitive behavior of subatomic particles, most notably the phenomenon of entanglement. In the late twentieth century it was discovered that quantum theory applies not only to atoms and molecules, but to bits and logic operations in a computer. This realization has brought about a revolution in the science and technology of information processing, making possible kinds of computing and communication hitherto unknown in the Information Age.

KEYWORDS

innovation, computing, quantum computing.

INTRODUÇÃO

As publicações isoladas sobre Física e Matemática em nossa universidade, e mais recentemente, da própria Ciência da Computação e Teoria da Informação, justamente por causa de seu isolamento, representam um legado relativamente fácil de ser identificado. O tema do título de tempos em tempos se torna assunto nas publicações de nosso meio acadêmico como da própria mídia; e não é sem razão, já que tem estado em curso o desenvolvimento vertiginoso da Informática e da Computação.

A mais recente evolução da Computação foi o resultado da rápida convergência das tecnologias de comunicação de dados, teoria da informação, tecnologia de telecomunicação e da própria informática. É a Internet, ou o modelo computacional baseado em uma rede, que teve suas origens nos anos da década de 1970, como um esforço do Departamento de Defesa dos EUA para conectar a sua rede experimental, chamada ARPAnet, a várias outras redes de rádio e satélites. Espalhou-se logo em seguida nos meios acadêmicos e está definitivamente popularizada [Fonseca Filho, 2007]. Uma ferramenta imprescindível na atualidade, tornou-se extremamente necessária na vida atual. O acesso rico à informação, à comunicação instantânea e ao entretenimento fez crescer exponencialmente o número de usuários da web nos últimos anos, que chegou a mais de 2,5 bilhões em todo o mundo, tendo como grupo majoritário adolescentes e adultos jovens.

Os dispositivos necessários para essa evolução tecnológica vão desde semicondutores em chips de computadores a lasers para uso médico, de leitores de códigos de barras a detectores de luz em câmeras digitais de smartphones, de lâmpadas de LED a aparelhos de ressonância magnética para exames de imagem até relógios atômicos de importância fundamental para a calibragem do GPS a sensores para a monitoração dos efeitos da mudança climática global.

Nos computadores que conhecemos (clássicos), o número de transistores nas unidades centrais de processamento (CPUs) cresceu exponencialmente com o tempo. O novo *chip* da Apple tem 16 bilhões de transistores comprimidos em um espaço mínimo. A *Informação* está sendo cada vez mais compactada e vamos chegar a uma situação em que *um único átomo vai definir um bit* de computação. Um enorme conjunto de tecnologias usadas hoje de forma corriqueira fundamenta-se em *propriedades quânticas* dos mundos molecular, atômico e subatômico. A Mecânica Quântica é a base para esse desenvolvimento.

Recentemente com a criação do *Latin America Quantum Computer Center* pelo SENAI CIMATEC, tem novamente proliferado na mídia, informações não muito confiáveis, mas, no entanto, colocam o tema novamente em evidencia. O que era uma especulação teórica em meu artigo de 1998 [Amado, 1998] e no de outros, imerso num mundo de computadores analógicos- digitais, é uma realidade hoje sem volta, onde um novo horizonte para a realidade profissional de estudantes de Ciência da Computação, Engenharia de Computação e Sistemas de Informação além do mercado de computadores domésticos e corporativos. Os entraves para a formação de grupos de pesquisa e cursos de qualquer nível terão que desaparecer.

Isso significa, por outro lado, que as inovações tornadas possíveis pela Mecânica Quântica já fazem parte de nosso dia a dia, como já foi comentado. Para se ter uma ideia do poder dos novos *processadores quânticos*, foi realizada uma demonstração pública recentemente, em 2019, pelo protótipo do Computador Quântico da Google, com um *chip* de 53 *qubits* (no artigo será visto do que se trata) o qual foi responsável por um processamento num intervalo

de tempo de 3 minutos aquilo que o *supercomputador* da IBM (que necessita de uma área equivalente a duas quadras de tênis) levaria 2 dias para realizar.

É interessante lembrar que nas publicações antes da virada do século, alguns autores já chamavam a atenção para o fato de que os componentes dentro de um computador se comportavam, em todos os aspectos importantes, de acordo com as leis da Física Clássica, como registra o famoso texto de Norbert Wiener [1894 - 1964], *Cibernética e Sociedade* [Wiener, 1985] o qual visualizava a Informação como uma quantidade tão fundamental na Física quanto a Energia ou a Estrutura da Matéria. Um teórico da Informação, consultor da IBM, TELECOM, UNIVAC e da XEROX, Tom Stonier (1927- 1999), publicou um livro instigante: *Information and the Internal Structure of the Universe* [Stonier, 1990]. No Brasil em 1991 foi publicado o mítico *A Mente Nova do Rei*, escrito pelo Prêmio Nobel de Física de 2020, o Prof. Roger Penrose [Penrose, 1991] cuja primeira intenção era responder ao questionamento de John A. Wheeler, sobre o chamado *universo participatório*. Por conseguinte, vários outros conceitos estão presentes (e por isso a dificuldade de leitura para os não iniciados) relacionados à Ciência da Computação, Matemática e Mecânica Quântica, onde o autor defende o argumento de que *a consciência humana não é apenas algorítmica e, portanto, não pode ser modelada por uma máquina de Turing ou computadores digitais*. Nesse livro, o autor levanta a hipótese de que a Mecânica Quântica desempenha um papel essencial na compreensão da consciência humana, portanto no *processamento das informações* no cérebro. Os artigos em revistas científicas e de divulgação proliferaram, em especial os de David DiVicenzo em 1995 [DiVicenzo, 1995], o fantástico artigo de Seth Lloyd [Lloyd, 1995] e Neil Gershenfeld e Isaac Chuang em 1998 [Gershenfeld and Isaac, 1998].

Mas de todo modo, por trás está a necessidade de não transgredir o *limite termodinâmico*, obedecendo as *leis físicas* [Amado, 2002]. Esse limite acontece para a *velocidade de processamento e a transferência de informação*, algo que já era preocupação de alguns, como Paul Benioff do Argonne National Laboratory [Benioff, 1982], o qual apresentou uma breve discussão sobre os modelos hamiltonianos da Mecânica Quântica no processo de computação, representado por máquinas de Turing padrão. Ficou obvio, a partir desses documentos que além da tendência da miniaturização contínua, seria atingido um ponto em que seríamos forçados a usar a Mecânica Quântica para descrever as operações elementares de nossos computadores.

A evidência do problema, no entanto, é antiga. Ganhou muita ênfase e até hoje é citado, um artigo do físico teórico Richard P. Feynman, o prêmio Nobel de Física de 1965 sobre o uso do computador para simular os fenômenos físicos [Feynman, 1982], em que ele chama a atenção para a possibilidade de construção de um modelo diferente de computador: os *computadores quânticos*; afim possibilitar o processamento dos fenômenos físicos quânticos. Mas na verdade, a ideia original foi de um jovem físico teórico, aqui já mencionado, Paul Benioff, que em 1979 submeteu um artigo a prodigiosa revista *Statistical Physics* sob o título *The Computer as a Physical System: A Microscopic Quantum Mechanical Hamiltonian Model of Computers as Represented by Turing Machines*; ou seja, todo o processo de computação é descrito a partir de um estado puro evoluindo sob a ação de uma determinada *função de Hamilton* [Amado, 1998]. Dessa forma, todas as partes componentes do Máquina de Turing seriam descritas por estados que têm uma relação de fase definida entre si. A existência de tais modelos teóricos, pelo menos sugeria que deveria ser examinada a possibilidade da construção real de tais máquinas coerentes. A agenda de leituras sobre o assunto aumentou mais com a publicação de outro artigo de Feynman [Feynman, 1985].

Portanto, quando os físicos começaram a pensar pela primeira vez sobre *computadores quânticos* na década de 1980, a ideia teórica parecia ser boa, mas provavelmente destinada

a permanecer no papel. No entanto, esse comportamento foi até 1994, quando Professor de Matemática Aplicada do MIT, Peter Shor surpreendeu o mundo publicando dois artigos seminiais [Shor 1994] e [Shor, 1995] descrevendo um algoritmo de tempo polinomial para fatorar inteiros. Foi mudada a antiga percepção. Conseqüentemente, na escala, a própria teoria que descreve o que os computadores podem fazer deveria ser revisada microscopicamente. Essa etapa foi inevitável para o surgimento do campo da *computação quântica*.

Na mesma época, como é um hábito dos físicos e matemáticos, para estudar e alicerçar um problema, foi pensado montar um Curso de Extensão, já que na Universidade existia um público alvo: os estudantes de Ciência da Computação e Engenharia Elétrica da Computação. No entanto, ficou inviável devido à necessidade de vários pré-requisitos para os candidatos. A saída opcional foi escrever um ensaio sobre os *Processos Quânticos de Computação* [Amado, 1998]. A conclusão do artigo, foi a de que os computadores quânticos poderiam ser úteis para simular sistemas quânticos, mas não esclarecia sobre as dificuldades técnicas para a construção, nem esclarecia até aquele momento, qual o limite para resolver problemas matemáticos mais rápido do que seus parentes convencionais.

É tentador afirmar que um *computador quântico* é aquele cujo desempenho é governado pelas leis da Mecânica Quântica. Mas, uma vez que as leis da Mecânica Quântica governam o comportamento de todos os fenômenos físicos, é preciso resistir a essa tentação. Um laptop já opera sob as leis da Mecânica Quântica, mas não é nem de longe um *computador quântico*.

Um *computador quântico* é aquele cuja operação explora certas transformações muito especiais em seu estado interno. As leis da Mecânica Quântica permitem que essas transformações peculiares ocorram sob condições cuidadosamente controladas. Num *computador quântico* os sistemas físicos que codificam os *bits* individuais não devem ter nenhuma interação física que não seja controlada. Todas as outras interações, por mais irrelevantes que possam ser em um computador comum, que chamamos de clássico, introduziriam interrupções potencialmente catastróficas na operação de um computador quântico. Essas interações prejudiciais podem incluir o ambiente externo, tais como, o movimento aleatório das moléculas de ar ricocheteando nos sistemas físicos que representam *bits* ou a absorção de quantidades mínimas de *energia térmica radiada do ambiente*. Essas interações destrutivas, no que importa para a computação e o que não importa, resultam em *decoerência*, que é fatal para a computação quântica. Os computadores quânticos precisam de proteção contra as interferências externas, seja fisicamente isolando-os, mantendo-os frios ou eletrocutados com pulsos de energia cuidadosamente controlados. Além disso existe a necessidade de corrigir erros que se infiltram no sistema.

A computação quântica é, portanto, um campo novo e emergente que tem o potencial de mudar drasticamente a maneira como pensamos sobre computação, programação e complexidade. O desafio para cientistas da computação e outros é o desenvolvimento das novas técnicas de programação apropriadas para computadores quânticos. Os fenômenos quânticos que o acompanham como o *emaranhamento* (ou entrelaçamento) *quântico* e o *cancelamento de fase* introduzem uma nova dimensão na computação. A programação não consistirá mais em meramente formular algoritmos passo a passo, mas requer novas técnicas de ajuste de fases e processos de engenharia, além da *difusão* para extrair resultados úteis. As novas tecnologias quânticas englobam: a comunicação, a computação, a simulação e metrologia, todos eles apoiados

pela Ciência Básica. Para a efetivação será necessário atuar em três frentes: engenharia e controle; software e teoria; educação e treinamento de pessoas.

Ao escrever este artigo, retorna-se ao tema abandonado há alguns anos, mas tenho em mente leitores de várias disciplinas. Primeiramente, estou me dirigindo a cientistas da computação, engenheiros elétricos e matemáticos, que podem saber pouco ou nada sobre a Mecânica Quântica (ou qualquer outro tipo de física), mas que desejam adquirir algumas informações no assunto, para serem capazes de seguir os novos desenvolvimentos na extensão da computação, julgando por si mesmos, quão revolucionários eles podem ser, e talvez possam escolher participar do desenvolvimento posterior da Ciência da Computação Quântica. Espero ter êxito no empreendimento ao focar exclusivamente em como a Mecânica Quântica amplia as possibilidades de manipulação *física da informação digital*, sendo possível caracterizar em que medida a teoria funciona de forma elementar e bastante concisa, porém rigorosa e completa para esta especial área de aplicação.

INTERLÚDIO CLÁSSICO

A Física Clássica, como se sabe, ofereceu duas grandes hipóteses sobre a natureza da luz: a *doutrina corpuscular de Newton* e a *teoria ondulatória de Huygens*. O primeiro a tentar uma reconciliação dessas duas foi o matemático e astrônomo irlandês William Rowan Hamilton (1805- 1865), um fervoroso admirador de Lagrange, que em 1835, estabeleceu uma analogia formal entre a Óptica e a Mecânica Clássica. Numa época em que a teoria ondulatória da luz, principalmente através do trabalho de Fresnel, alcançou seus sucessos mais espetaculares, Hamilton propôs dar à Óptica, como ciência formal, a mesma *beleza, poder e harmonia* que Lagrange deu à Mecânica.

Hamilton expressou a *equação do movimento de uma partícula material sob a ação de um campo de força*, de modo bastante similar às equações que descrevem o *caminho ótico de um raio luminoso em meio não homogêneo*, cujo índice de refração n depende da posição no espaço, portanto das coordenadas espaciais, x, y, z [Hamilton, 1828]. Em sua Dinâmica, da mesma forma como as *variações do índice de refração* modificam a trajetória dos raios luminosos, a variação da Energia Potencial de interação faz com que as trajetórias das partículas sejam modificadas. Ao longo do *caminho ótico* podemos considerar que a posição é parametrizada pelo comprimento de arco e nesse caso o que denominamos *raio luminoso* é representado pelo segmento de reta paralela a reta tangente em cada posição da trajetória (que seria a mesma da velocidade de uma partícula material) ponto a ponto no espaço.

Hamilton introduziu a função S que mais tarde ele chamaria de função principal. Isso foi definido em termos da função característica pela equação. Como a Natureza escolhe entre todas as possibilidades que lhe são oferecidas, aquela que é a mais eficaz; e nesse caso a mais eficaz é a que obedece ao Princípio da Mínima Ação. Em outras palavras, dentre as inúmeras maneiras pelas quais um sistema pode alterar sua configuração durante um intervalo de tempo $(t_B - t_A)$, o movimento real que ocorre é aquele que maximiza ou minimiza a integral

$$(1) \quad S(B, A) = \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{L}(x, \dot{x}, t). dt$$

A função \mathcal{L} é a *função lagrangeana*, que depende das posições, das velocidades e do tempo explicitamente; onde a quantidade \dot{x} , representa o *excesso de Energia Cinética sobre a Energia Potencial*, sendo assim

$$(2) \quad S(B, A) = \int_{t_A}^{t_B} (T - V) \cdot dt$$

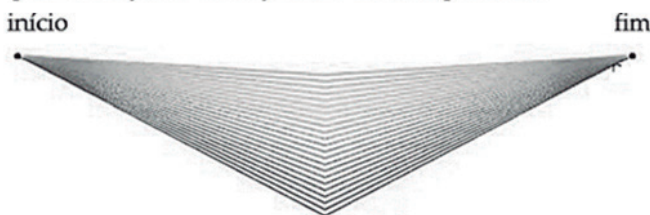
Como a *causalidade* não é necessária, a ideia de um corpo se mover de acordo com o Axioma II de Newton, perde o sentido; então a descrição de uma *trajetória adequada* para um corpo ir por exemplo de uma posição *inicial* para uma posição *final* vai depender na verdade entre todos os *prováveis percursos* a serem realizados aquele que tem a maior *probabilidade* para a ação $S(B, A)$ ser um *mínimo*.

Axioma 1

Os corpos na Natureza não podem escolher entre o percurso mais curto ou o mais breve; nesse caso a integral de ação é um mínimo.

Mas esse *princípio* está formulado de maneira incompleta. A partícula não toma o *caminho de mínima ação*, ela percorre aquele que tem a *menor ação*, por um método análogo àquele que a *luz percorre aquele com o menor tempo*. E essa analogia ótico-mecânica está implícita no *princípio*. Qualquer *caminho* que a luz percorra num intervalo de tempo diferente, ela chega com uma *fase diferente*. A *amplitude total* em um ponto é a *soma das amplitudes de todas as diferentes maneiras pelas quais a luz pode chegar*. O *caminho importante* é aquele para o qual existem muitos caminhos próximos que levam a mesma fase.

Figura 1 Diagrama apresentando as contribuições da *integral de caminho* para o conjunto de trajetórias de uma partícula



É exatamente a mesma coisa na Mecânica Quântica. Portanto funciona assim: a probabilidade de que uma partícula, saindo do ponto início no instante t , chegue no ponto fim no instante $(t + \delta t)$, é o quadrado de uma amplitude de probabilidade $\psi(x, t)$. A amplitude total pode ser escrita como a soma das amplitudes de cada caminho possível de cada maneira de chegar. Para cada $x(t)$, para cada trajetória imaginária possível temos que calcular uma amplitude. E então todas são somadas. A integral da ação afirma que a amplitude de uma trajetória deve ser proporcional a $e^{iS/\hbar}$ (o ângulo de fase é S/\hbar , com \hbar a constante de Planck racionalizada). A interpretação da *soma das histórias*, a *integral do caminho* é considerada fundamental e a realidade é vista como uma única “classe” indistinguível de caminhos que compartilham os mesmos eventos.

A abordagem de Hamilton apareceu como uma extensão ao trabalho de Joseph-Louis Lagrange [1736-1813]. Como foi visto acima, a *função lagrangeana*, depende das posições, das velocidades e do tempo explicitamente; onde a quantidade

$$(3) \quad \mathcal{L}(x, \dot{x}, t) = T - V$$

De uma forma mais geral ela pode ser definida de uma forma *mais geral* que com coordenadas podem cartesianas, ou coordenadas polares, ou qualquer outra coisa que possamos

pensar. A notação para um sistema geral de coordenadas é \mathbf{q}_i . Essas coordenadas generalizadas definem as velocidades generalizadas de tal modo que a função lagrangeana seja definida por

$$(4) \quad \mathcal{L}(x, \dot{x}, t) \rightarrow \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$$

Supondo que as coordenadas de um sistema dinâmico abstrato sejam \mathbf{q}_i . A idéia geral de uma transformação infinitesimal é que ela é uma pequena mudança das coordenadas, que pode depender do valor das coordenadas. O deslocamento é parametrizado por um parâmetro infinitesimal δ , e tem a forma $\delta\mathbf{q}_i$. A operação δ representa uma variação de qualquer parâmetro particular do sistema por uma quantidade infinitesimal distante do valor tomado pelo parâmetro. Isso define a chamada variação δ do caminho e $\delta\mathbf{q}_i$ sua variação virtual, sujeita apenas à limitação de que $\delta\mathbf{q}_1(t) = \delta\mathbf{q}_2(t)$, ou seja, conecta duas configurações possíveis no mesmo instante. Portanto $\mathbf{q}_1(t) = \mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{q}_2(t) = \mathbf{y}(t)$, então $\delta\mathbf{q}_1(t) = \delta\mathbf{x}(t)$ e $\delta\mathbf{q}_2(t) = \delta\mathbf{y}(t)$, um pequeno cálculo

$$(5) \quad \delta\dot{q}_i = \delta\left(\frac{dq_i}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(\delta q_i)$$

Determinando o quanto muda a função lagrangeana quando é realizada uma transformação virtual na posição e na velocidade

$$(6) \quad \delta\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) = \sum \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i} \delta\dot{q}_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i \right)$$

As quantidades é justamente o momento generalizado conjugado a \mathbf{q}_i , um conceito que transcende a simples ideia de momento cartesiana. Portanto as equações de Euler-Lagrange

$$(7) \quad p_i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i} \therefore \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}$$

$$(8) \quad \delta\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) = \sum_i \left(p_i \delta\dot{q}_i + \frac{dp_i}{dt} \delta q_i \right) \Leftrightarrow \delta\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) = \frac{d}{dt} \left(\sum_i p_i \delta q_i \right)$$

Quando a derivada temporal se anula temos um resultado conservativo. A conservação da energia aparece então em

$$(9) \quad \frac{d}{dt} \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) = \sum_i \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} \therefore$$

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) = \sum_i (p_i \ddot{q}_i + \dot{p}_i \dot{q}_i) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} = \frac{d}{dt} \sum_i (p_i \dot{q}_i) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}$$

A última revela um fato interessante, se for definida uma função \mathcal{H}

$$(10) \quad \sum_i (p_i \dot{q}_i) - \mathcal{L} = \mathcal{H} \Rightarrow \frac{d\mathcal{H}}{dt} = - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}$$

Significa que \mathcal{H} varia com o tempo se a função lagrangeana variar explicitamente com o tempo. Essa função a \mathcal{H} é a hamiltoniana ou função de Hamilton. A partir dessa relação com a função lagrangeana determina-se as equações canônicas de Hamilton

$$(11) \quad \dot{p}_i = - \frac{\partial}{\partial q_i} \mathcal{H}(q_i, p_i)$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial}{\partial p_i} \mathcal{H}(q_i, p_i)$$

No séc. XIX os matemáticos franceses desenvolveram uma forma matemática muito elegante para a formulação da Mecânica embora o grau realmente surpreendente de sucesso não se tornou aparente até o século XX, quando a Mecânica Quântica foi descoberta. Quase parece que a geração anterior de matemáticos era clarividente na maneira como inventou paralelos exatos dos conceitos quânticos posteriores. Sem especificar uma função particular, seja $\mathcal{U}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ tal que qualquer trajetória real do sistema definirá um valor de F que varia ao longo da trajetória

$$(12) \quad \frac{d\mathcal{U}}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) = \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right)$$

Esse resultado é conhecido como *parêntesis* ou *colchete de Poisson*. O *parêntesis de Poisson* de quaisquer duas funções que representem *variáveis dinâmicas*, \mathcal{U} e \mathcal{V} , é definido como

$$(12) \quad \{\mathcal{U}, \mathcal{V}\} = \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial p_i} - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_i} \right)$$

Então

$$(13) \quad \frac{d\mathcal{U}}{dt} = \{\mathcal{U}, \mathcal{H}\} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t}$$

Se fizer $\mathcal{U} = \mathbf{q}_i$ e depois $\mathcal{U} = \mathbf{p}_i$ quando não apresentam dependência temporal explícita e para $\mathcal{V} = \mathcal{H}$

$$(14) \quad \frac{dq_i}{dt} = \{q_i, \mathcal{H}\} \text{ e } \frac{dp_i}{dt} = \{p_i, \mathcal{H}\}$$

São as *equações de Hamilton* definidas com os *parêntesis de Poisson*.

As vantagens teóricas para escrever as equações de movimento de uma variável dinâmica arbitrária residem no fato que os *parêntesis de Poisson* são invariantes mediante as transformações canônicas.

Propriedades ou Teoremas (Lemos, 2004 e Leech, 1971)

T1. Anti –simetria

Sejam duas funções que representem *variáveis dinâmicas*, \mathcal{U} e \mathcal{V}

$$(15) \quad \{\mathcal{U}, \mathcal{V}\} = -\{\mathcal{V}, \mathcal{U}\}$$

T2. Linearidade

Sejam \mathcal{U} e \mathcal{V} duas funções, existe uma função \mathcal{Q} , que representam *variáveis dinâmicas* e um coeficiente σ independente de (\mathbf{q}, \mathbf{p})

$$(16) \quad \{\mathcal{U} + \alpha \mathcal{Q}, \mathcal{V}\} = \{\mathcal{U}, \mathcal{V}\} + \sigma \{\mathcal{Q}, \mathcal{V}\}$$

T3. Dadas as funções \mathcal{U} , \mathcal{V} e \mathcal{Q}

$$(17) \{u\mathcal{V}, \mathcal{Q}\} = u\{\mathcal{V}, \mathcal{Q}\} + \{u, \mathcal{Q}\}\mathcal{V} \therefore \{u, \mathcal{V}\mathcal{Q}\} = \{u, \mathcal{V}\}\mathcal{Q} + \mathcal{V}\{u, \mathcal{Q}\}$$

T4. Identidade de Jacobi.

$$(18) \{\{u\mathcal{V}\}, \mathcal{Q}\} + \{\{\mathcal{V}, \mathcal{Q}\}, u\} + \{\{\mathcal{Q}u\}, \mathcal{V}\} = 0$$

T5. Seja λ um parâmetro

$$(19) \frac{\partial}{\partial \lambda} \{u, \mathcal{V}\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} u, \mathcal{V} \right\} + \left\{ u, \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathcal{V} \right\}$$

Aqui λ pode assumir qualquer das variáveis \mathbf{q} , \mathbf{p} ou \mathbf{t} ou um outro parâmetro qualquer.

P6. Parêntesis de Poisson fundamentais

$$(20) \{q_i, q_j\} = 0; \{p_i, p_j\} = 0; \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$$

O *parêntesis de Poisson* tem sua importância, na transição da Mecânica Clássica para a Mecânica Quântica, onde a chamada *quantização canônica* consiste em associar uma *variável dinâmica* $\mathcal{A} \equiv A(q_1, q_2, \dots, q_n; p_1, p_2, \dots, p_n)$ que necessita uma especificação da ordem das coordenadas \mathbf{q}_i e \mathbf{p}_i , na expressão explícita da função $A(q_1, q_2, \dots, q_n; p_1, p_2, \dots, p_n)$. Na prática a matriz A tem uma forma polinomial nos \mathbf{p}_i cujos coeficientes são função dos \mathbf{q}_i . A matriz A associada a *variável dinâmica*, é considerada como um *operador* para cada variável dinâmica. A terminologia empregada é devido a indicação de que existe uma falha em *comutar*. Na representação de Werner Heisenberg (1901- 1976) se A representa um *operador*, ele satisfaz a equação

$$(21) \frac{dA}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [A, H] + \frac{\partial A}{\partial t}$$

Onde H é o *operador hamiltoniano* e o *comutador* é dado por

$$(22) [A, H] = AH - HA$$

A *comutação de dois operadores* corresponde ao *parêntesis de Poisson* clássico multiplicado por $i\hbar$.

$$(23) [U, V] \rightarrow i\hbar\{u, v\}$$

A Mecânica formulada na linguagem dos *parêntesis de Poisson* representa o análogo clássico da representação matemática de Heisenberg. Tal formulação não era totalmente conhecida pelos físicos do início do século XX (apenas alguns matemáticos tinham conhecimento, por exemplo, David Hilbert e Max Born). O grande avanço, no entanto, foi dado por Paul A. M. Dirac (1902- 1984) que pode escrever as condições de quantização em termos de Dinâmica Hamiltoniana Clássica, usando a equivalência da diferença dos produtos de Heisenberg para colchetes de Poisson. Há outra característica fundamental da abordagem de Dirac, o procedimento incorpora a Mecânica Quântica no próprio coração da dinâmica hamiltoniana. Assim como Heisenberg apreciou ter aplicado *conceitos quânticos ao próprio espaço*, Dirac fez a mesma coisa tratando o *momento* e as *coordenadas espaciais* no mesmo pé e introduzindo a *condição de quantização* de Bohr nos fundamentos da mecânica hamiltoniana.

Sejam duas funções que *representem dois símbolos de medição*, X e Y , o *comutador*

$$(24) [X, Y] = XY - YX$$

O anticomutador é

$$(25) \quad [X, Y]^* = XY + YX$$

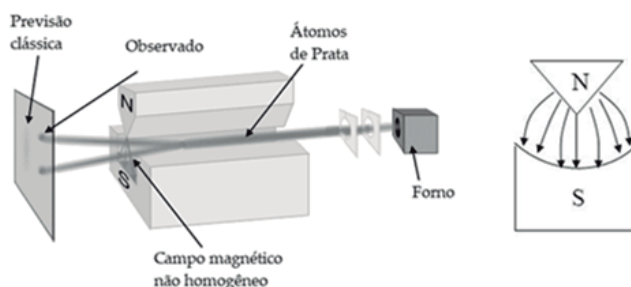
Então, se $[X, Y] = 0$, $[X, Y]^* = 2XY$ ou $2YX$. Nesse caso, pode ser considerado $\frac{1}{2}[X, Y]^*$ como um *produto simetrizado* de X e Y . Como consequência imediata vale a identidade

$$(26) \quad XY = \frac{1}{2} \cdot [X, Y]^* + \frac{1}{2} \cdot [X, Y]$$

A VARIÁVEL DINÂMICA DE ORIENTAÇÃO NO ESPAÇO.

Na teoria de Bohr, uma grandeza de especial importância na classificação das *raias espectrais* é o *momento angular*. Esse fato conduziu por sua vez a ideia da *quantificação da orientação espacial* dos sistemas atômicos, cuja confirmação experimental mostrou a *quantificação azimutal* para os átomos imersos num campo magnético. O difícil experimento foi realizado pelo físico americano Otto Stern (1888-1969) em colaboração com o físico alemão Walther Gerlach (1889-1979) em 1922 [Gerlach, & Stern, 1922]. Trata-se de um fino feixe de átomos de prata produzido pela evaporação em um forno e colimado por duas fendas em série, passando (em alto vácuo) entre dois polos de um ímã não homogêneo (fig)

Figura 2 - Diagrama ilustrativo do experimento de Stern- Gerlach

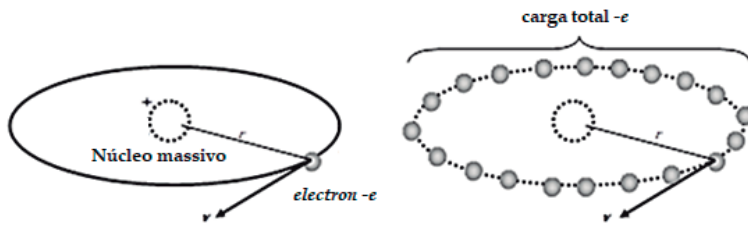


Fonte - [Gerlach, & Stern, 1922].

Se uma partícula neutra passa por uma região com *campo magnético homogêneo*, a força exercida em direções opostas do *dipolo* se cancelam e o movimento da partícula é inalterado. No experimento de Stern-Gerlach foram usadas partículas neutras (átomos de Prata) e a mesma conclusão é obtida, uma vez que foi designado para testar *momento angular*, e não fenômenos eletrostáticos. Se a partícula viaja através de um *campo magnético* não homogêneo, então a força em um dipolo será ligeiramente maior que a força oposta no outro extremo (daí a forma irregular ímã). A descrição matemática para explicar o resultado do experimento faz uso dos resultados da Eletrodinâmica de Maxwell.

Considerando o modelo de Bohr, o átomo de Hidrogênio, portanto, um modelo planetário clássico, com um electron em uma “órbita circular” ao redor do núcleo. Nesse modelo o electron se move com *velocidade tangencial constante* v , nessa trajetória circular muito particular de raio r . Existem nesse caso, *efeitos magnéticos* decorrentes, como é bem conhecido da Eletrodinâmica de Maxwell. No centro da trajetória está uma carga positiva nuclear, tornando o sistema eletricamente neutro, mas esse núcleo com massa relativamente grande, move-se tão vagarosamente ao redor do centro de massa do sistema que os possíveis *efeitos magnéticos* podem ser desprezados. A figurinha abaixo serve para exemplificar, embora não represente a realidade.

Figura 3 Ilustrando o comportamento do electron ao redor do núcleo.



O campo magnético do sistema num certo intervalo médio de tempo absolutamente não é nulo. Isso porque devido ao movimento do electron em sua órbita nesse mesmo intervalo de tempo, tudo se passa como se existissem n cargas negativas na mesma trajetória circular numa “procissão em cadeia sem fim”, como se estivessem contidas num “anel circular” de raio r definindo assim uma *espira de corrente circular de raio r* . Nesse caso, no mesmo intervalo de tempo médio, a *frequencia efetiva f* do electron, informa sobre o número de rotações por segundo

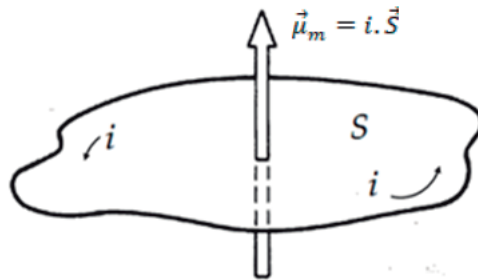
$$(27) \quad \omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{2\pi r}$$

A corrente elétrica nessa espira imaginária terá sentido oposto a v , e seu valor será

$$i = \frac{q}{\Delta t} = q \cdot f = \frac{ev}{2\pi r}$$

$$(28) \quad i = \frac{ev}{2\pi r} [C/s]$$

Figura 4 Representação do momento magnético perpendicular ao plano definido pela linha de corrente (electron ao redor do núcleo)



O produto $(i.S)$ de dimensão $[IL^2]$ no S.I. é expresso em $[A.m^2]$ representa o *momento magnético μ_m* da *espira virtual*. É evidentemente um vetor perpendicular ao plano definido da *espira* ou da superfície orientada

$$(29) \quad \vec{\mu}_m = i \cdot \vec{S}$$

No caso do electron, a área definida é de um plano circular, então a intensidade do vetor será

$$|\vec{\mu}_m| = \mu_m = \pi r^2 i = \pi r^2 \frac{ev}{2\pi r} = \frac{evr}{2}$$

$$(30) \quad \mu_m = \frac{evr}{2}$$

É possível determinar o momento magnético em função do momento angular cuja intensidade é

$$L = m_e v r \Leftrightarrow v = \frac{L}{m_e r} \Rightarrow \mu_m = - \frac{e r}{2} \frac{L}{m_e r} = - \frac{e L}{2 m_e}$$

$$(31) \quad \mu_m = - \frac{e L}{2 m_e}$$

Essa última equação envolve apenas constantes fundamentais, portanto uma solução bem geral pois inclui as órbitas circulares e elípticas. Como o momento angular se conserva, conseqüentemente o momento magnético também se conserva em intensidade e direção. A razão giromagnética será então

$$(32) \quad \frac{L}{\mu_m} = - \frac{2 m_e}{e}$$

Portanto, deve haver uma relação entre a magnetização de um material e seu momento angular. Em termos macroscópicos,

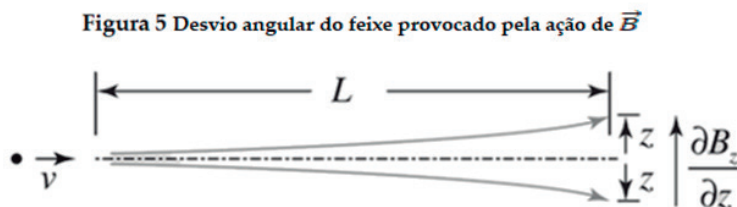
$$\frac{|\vec{L}|}{|\vec{\mu}_m|} = \frac{2 m_e}{e} = 1,138625 \cdot 10^{-11} \left[\frac{kg}{C} \right]$$

No experimento, a força resultante exercida pelo campo não homogêneo sobre o átomo de prata não excitado, cuja estrutura se assemelha a de um átomo alcalino (aqui neste caso o momento magnético do electron é mais evidente do que o do núcleo). O átomo nesse caso se comporta como um pequeno imã. O movimento ocorre através de uma região com a presença de um campo magnético não homogêneo, provocado pela forma geométrica de um dos polos do imã¹. Se a intensidade do campo magnético é em um dos polos magnéticos do átomo, no outro polo será de tal modo que a força efetiva sobre o átomo será

$$\vec{F} = \vec{\mu}_m \cdot \vec{B} - \vec{\mu}_m \cdot (\vec{B} - \nabla B) = \vec{\mu}_m \cdot \nabla B$$

$$(33) \quad \vec{F} = \vec{\mu}_m \cdot \nabla B$$

A intensidade é portanto, assumindo que a direção é paralela a z, e o ângulo formado entre e como sendo θ



Classicamente, o momento magnético pode assumir qualquer ângulo em relação à direção do campo magnético e, portanto, seria de esperar que houvesse uma distribuição aleatória dos ângulos de deflexão. Se, no entanto, a quantização do espaço for real, as deflexões deveriam ocorrer apenas em ângulos de deflexão θ específicos. Devido ao movimento de precessão ao redor de (conhecida como precessão de Larmor) a componente $(\mu_m)_z$ ao longo do percurso permanece constante, mas as outras oscilam ao redor de zero. Tudo acontece como se cada

¹ A ideia é análoga ao caso dos condutores elétricos, conhecido como poder das pontas, uma propriedade dos condutores de concentrar cargas elétricas em suas extremidades pontiagudas, o que provoca aumento da intensidade do campo elétrico.

átomo estivesse submetido ao valor médio da força em várias oscilações. Levando em conta a geometria do diagrama (fig.5), e K a energia cinética dos átomos do feixe incidente, um simples cálculo permite determinar o valor de θ :

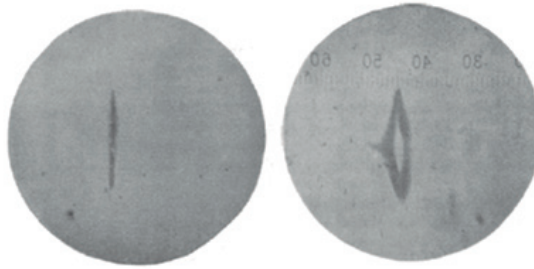
$$(35) \quad z = \frac{1}{2} a_z t^2 = \frac{1}{2} \frac{F_m}{m_{\text{átomo}}} \left(\frac{L}{v}\right)^2 = \frac{1}{2m_{\text{átomo}}v^2} L^2 \mu_m \frac{\partial B}{\partial z} = \frac{L^2}{4K} \mu_m \frac{\partial B}{\partial z}$$

Mas

$$(36) \quad \frac{z}{L} = \cos \theta \Rightarrow \theta = \cos^{-1} \left(\frac{\mu_m \cdot L}{4K} \frac{\partial B}{\partial z} \right)$$

O desvio é portanto proporcional as componente de μ_m na direção do campo magnético. estando os átomos orientados aleatoriamente, $(\mu_m)_z$ pode assumir os valores de compreendidos entre $+(\mu_m)_z$ e $-(\mu_m)_z$ e todos os ângulos de desvio, valores compreendidos entre os dois valores correspondentes. O impacto na chapa fotográfica apresenta o resultado como duas pequenas manchas equidistantes e alinhadas paralelamente a z

Figura 6 Medições do original sob o microscópio usando um micrômetro ocular. As fotografias mostram que o feixe de átomos de prata divididos por um campo magnético não homogêneo. A primeira imagem é uma fotografia depois das 4 horas de exposição sem campo magnético. A segunda imagem após 8 horas de exposição



Fonte [Gerlach, & Stern, 1922]

O que se observa é uma sucessão de pequenas manchas equidistante e alinhadas paralelamente ao eixo Oz , se é feito o campo variar, ou seja, a distância entre as manchas ocorre na mesma proporção, sem que o resultado da imagem sofra qualquer alteração, permanecendo constante o número n de manchas. Cada uma das manchas corresponde a um valor de $(\mu_m)_z$; portanto uma magnitude quantificada suscetível a assumir n valores distintos. A componente do momento angular L_z possui evidentemente a mesma propriedade.

É possível objetar a interpretação desse experimento por ela estar baseada em uma hipótese muito particular em relação a origem do paramagnetismo atômico; a existência de um momento magnético permanente proporcional ao momento angular. a negação do fato, dificulta a compreensão do experimento para a explicação das n manchas distintas sobre o anteparo sem admitir que certas magnitudes que caracterizam os movimentos internos estão quantificadas. Logo, a medida que o centro de massa segue as leis da Mecânica Clássica, sua trajetória vem totalmente determinada pelo estado dinâmico do átomo ao chegar na região do ímã e o aparecimento sobre o anteparo de uma distribuição de impactos mais ou menos espaçados, é interpretado não estando os átomos nas mesmas condições iniciais e que as variáveis dinâmicas que definem o estado inicial estão estatisticamente distribuídas dentro de um certo

domínio extenso. A existencia das n manchas separadas confirma essa distribuição estatística apresentando ao menos n descontinuidades, ou de outro modo, *certas variáveis dinâmicas do átomo estão quantificadas*, como praticamente todos os átomos estão em seu estado fundamental, caso contrário emitiriam radiação, assim não se pode tratar da quantificação da energia mas da *quantificação da variável dinâmica de orientação no espaço do átomo*.

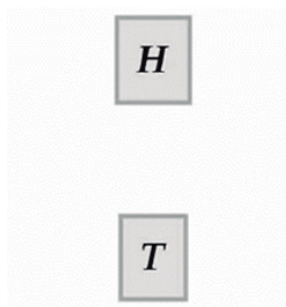
DO EXPERIMENTO IMAGINÁRIO AO VETOR DE ESTADO.

Iniciando com um exemplo simples sugerido por Susskind [Susskind & Friedman, 2015]. Imagine abstratamente um objeto que possui apenas pela condição em que se encontra, do ponto de vista macroscópico, descrita por suas variáveis ou propriedades; *um estado*. Poderia ser uma *moeda* que pode mostrar *cara* (H) ou *coroa* (T), mas colada à mesa, e escolho por exemplo que está mostrando sempre cara (H). Percebe-se que é um *sistema* com *dois estados* (as faces) ou poderia representar um *bit* (dígito binário) com os dois estados H e T (a ideia de *estado* na Mecânica Quântica é conceitualmente bem diferente de sua contrapartida clássica). Formalmente o que temos é o que denominamos de *grau de liberdade* ξ que pode assumir dois valores $+1$ e -1 . Então o *estado* H é representado por $\xi = +1$ e o estado T será representado por $\xi = -1$.

No jargão da física, a *coleção de todos os estados* ocupados por um sistema é seu *espaço dos estados* (que não é o espaço ordinário, mas uma representação matemática de um sistema físico na Teoria Matemática de Controle, composto de um conjunto de variáveis de entrada, de saída e de estado relacionadas entre si por meio de equações diferenciais de primeira ordem) ou, mais simplesmente, seu *espaço de estado*, cujos elementos rotulam os *possíveis estados do sistema*.

Oferecendo uma explicação da terminologia, a coleção de objetos físicos como partículas, campos, ondas ou o que quer que seja, é chamada de *sistema*. Um *sistema* é o *universo inteiro* ou está *isolado* completamente de toda vizinhança e se comporta como se nada mais existisse; nesse caso é um *sistema fechado*. Para essa situação da *moeda* colada à mesa, o *espaço dos estados*; é o conjunto matemático cujos elementos definem as possíveis condições *do sistema*. O nosso *sistema simples* tem um *espaço dos estados* que consiste em *dois pontos* pois a *moeda* tem *dois estados possíveis* (esse conceito será importante mais à frente). Imagine agora que a *moeda* pode ser *cara* ou *coroa* H ou T

Figura 7- Espaço dos estados

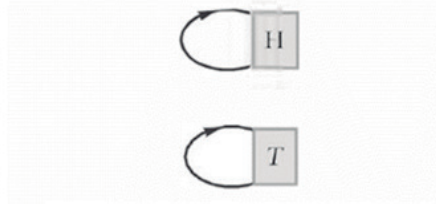


Classicamente os sistemas evoluem suavemente, sem mudanças bruscas ou saltos ou ainda interrupções. Esse comportamento é denominado *contínuo*. Obviamente, no caso do objeto como a moeda, *cara* e *coroa* não se alteram suavemente. O comportamento, neste caso, ocorre necessariamente em *mudanças discretas* (ou saltos). Portanto, supondo que o *tempo* tenha um *comportamento discreto* rotulado por números inteiros, um mundo cuja *evolução* é *discreta* pode ser chamado de *estroboscópico*. Por outro lado, quando o *sistema* é *dinâmico*, quando

o sistema varia com o tempo. Um sistema dinâmico consiste em mais de que um *espaço dos estados*; implicando numa *lei do movimento*, ou *lei dinâmica*. A *lei dinâmica* é uma regra que permite conhecer o comportamento do *estado dinâmico* em cada instante. É a *regra* que define como vai ocorrer a *transição de estado*.

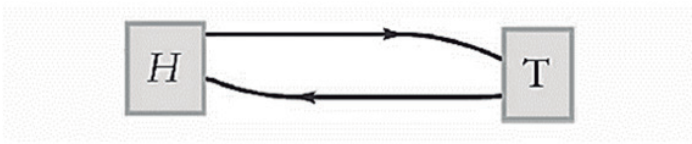
Uma *lei dinâmica muito simples* é que *qualquer que seja o estado em algum instante, o próximo estado é o mesmo*. Nesse caso existem duas histórias possíveis: $H H H H H H \dots$ e $T T T T T T \dots$. Se iniciar com H , o sistema permanecerá H ; se iniciar com T , o sistema permanece T .

Figura 8 A lei dinâmica para um sistema de dois estados



O próximo sistema mais simples tem um *espaço dos estados* que consiste em dois pontos; neste caso, a *moeda* tem dois estados possíveis (esse conceito será importante mais à frente). Imagine agora que a *moeda* pode ser *cara* ou *coroa* H ou T . Para a *segunda lei* possível as setas vão de H para T e de T para H . É possível então *prever o futuro*. Por exemplo, iniciando com H , a *história* será $H T H T H T H T \dots$. Se iniciar com T , a *história* é $T H T H T H T H \dots$

Figura 9 Outra lei dinâmica para um sistema de dois estados



Posso identificar outra situação com um *sistema de dois estados*, ou um *bit*, um sistema de dois estados um sendo H e o outro T . Mais formalmente, inventamos um *grau de liberdade* denominando de ξ que *pode assumir dois valores*, a saber $+1$ e -1 . O estado H é substituído por $\xi = +1$ e o estado T por $\xi = -1$. Classicamente, isso é tudo que existe para o *espaço dos estados*. O sistema está no estado $\xi = +1$ ou $\xi = -1$ e não há nada no meio. Na Mecânica Quântica, vamos pensar neste sistema como um *qubit* (quantum Binary digiT).

Portanto a lei mais simples é apenas que nada acontece. Nesse caso, se formos de um instante discreto (n) para o próximo ($n + 1$), a *primeira regra da evolução* é

$$(37) \quad \xi(n + 1) = \xi(n)$$

A *segunda regra de evolução* será

$$(38) \quad \xi(n + 1) = -\xi(n)$$

Implica que o estado muda em cada etapa.

Bom, é possível construir vários exemplos simples, mas com um número finito de estados no *espaço de estados*. Pode-se generalizar a situação para um sistema dinâmico com um *número infinito de estados*. Por exemplo, imaginando uma linha com, como uma linha de trem com uma sequência infinita de estações em ambas as direções. Para descrever tal sistema, podemos

rotular os pontos ao longo da linha por *inteiros*, igualmente como rotulamos os instantes discretos de tempo acima. Como está sendo usada a notação n para os intervalos de tempo discretos, agora será usado \mathcal{N} para os pontos na linha.

Figura 10 Espaço dos estados para um sistema infinito



A forma da *regra* será

$$(39) \quad \mathcal{N}(n + 1) = \mathcal{N}(n) + 1$$

São possíveis outras formas (nem todas válidas), por exemplo

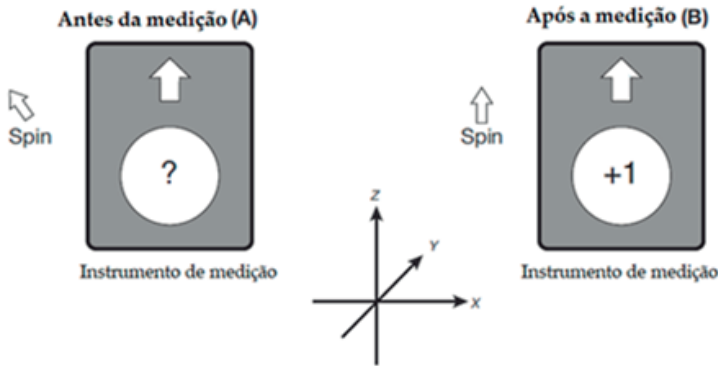
$$(40) \quad \begin{aligned} \mathcal{N}(n + 1) &= \mathcal{N}(n) - 1 \\ \mathcal{N}(n + 1) &= \mathcal{N}(n) + 2 \\ \mathcal{N}(n + 1) &= \mathcal{N}(n) - n^2 \\ \mathcal{N}(n + 1) &= -1^{\mathcal{N}(n)} \cdot \mathcal{N}(n) \end{aligned}$$

Na Eq. (37), onde quer que ocorra o início, eventualmente chegaremos a todos os outros pontos indo para o futuro ou indo para o passado. Dizemos que existe um único ciclo infinito. Com Eq. (39), por outro lado, dado o início com um valor ímpar de \mathcal{N} , nunca chegará a um valor par e vice-versa. Assim, dizemos que existem dois ciclos infinitos.

No entanto existe um fato oculto que fomos descuidados. Um *experimento* não consiste apenas de um exercício matemático (ou um *experimento mental*) mas envolve um equipamento M para realizar as *medições* e registrar os resultados das *medições*. O processo envolve, sinais elétricos, portanto *correntes elétricas*, cujos transportadores de carga elétrica são *electrons*. Um electron não é o mesmo que um quark ou um neutrino. Mas mesmo um tipo específico de partícula, como um electron, não é completamente especificado por sua localização. Intrínseco ao electron está um *grau extra de liberdade* chamado de *spin*.

No caso do *sistema de dois estados*, o equipamento M interage com o sistema (o *spin*) e registra o valor de ξ . As partículas têm propriedades além de sua posição no espaço. Por exemplo, eles podem ou não ter uma carga elétrica ou massa. Pense no aparelho como uma *caixa preta* (algo que Vc não conhece como funciona) com uma janela que exhibe o resultado de uma *medição*. A *seta para cima* é importante porque mostra como o aparelho está orientado no espaço e sua direção implicará nos resultados das medições.

Figura 11 (A) Aparelho giratório antes de qualquer medição. (B) Spin e aparelho após uma medição resultando em +1. A rotação agora está preparada no estado +1. Se a rotação não for perturbada o aparelho mantém a mesma orientação, todas as medições subsequentes darão o mesmo resultado. Os eixos coordenados mostram nossa convenção para rotular as direções de espaço



Fonte [Susskind & Friedman, 2015].

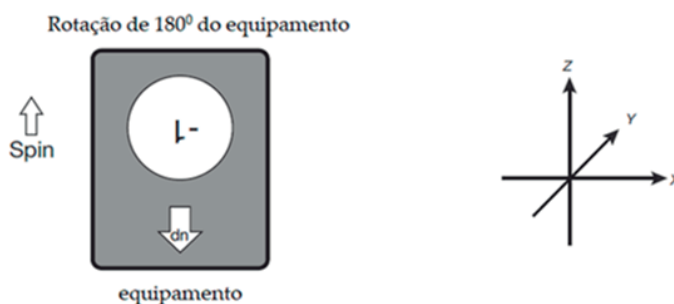
A figurinha mostra que após a medição o *spin* aponta para cima $\xi_z = +1$. O *spin* está orientado *para cima* segundo o eixo z . Caso o *spin* não seja perturbado ele manterá a mesma orientação e todas as *medidas subsequentes* darão o *mesmo resultado*. Mas olhando para o aparelho, determinamos o valor de ξ . Todo esse processo constitui um experimento muito simples projetado para medir ξ . Vale aqui a eq. 1. Antes que o aparelho interaja com o *spin*, a janela está em branco (marcada com um ponto de interrogação). Depois de medir ξ , a janela mostra +1 ou -1. Olhando para o aparelho, determinamos o valor de ξ . Todo esse processo constitui um experimento muito simples projetado para medir ξ .

Após a medição de ξ , volta-se as condições iniciais do sem provocar a perturbação do *spin*, e então mede-se novamente. Supondo a lei simples da eq. 1, devemos obter a mesma resposta que obtivemos da primeira vez; cujo resultado será $\xi = +1$. Da mesma forma para $\xi = -1$. O mesmo acontecerá com qualquer número de repetições. Isso nos permite confirmar o resultado do experimento. Também podemos afirmar da seguinte maneira: a primeira interação com o aparelho M prepara o sistema em um dos *dois estados*. Experimentos subsequentes confirmam esse estado. Não há aqui diferença entre a Física Clássica e Quântica. Se fizermos uma rotação no equipamento sem a perturbação do *spin* os resultados se mantêm; isso significa que ξ representa o *grau de liberdade* que está associado ao senso de direção no espaço [Gerlach & Stern, 1922].

Agora que medimos ξ , vamos redefinir o equipamento na condição de trabalho neutro e, *sem perturbar o spin*, medimos ξ novamente. Assumindo a simples lei da eq. 1, será obtido o mesmo responder como ocorreu da primeira vez. Esse resultado $\xi = +1$ será seguido por $\xi = +1$ e da mesma forma para $\xi = -1$. Isso será verdade para qualquer número de repetições. O fato é interessante porque nos permite confirmar o resultado de um experimento concretamente. Também podemos dizer isso da seguinte maneira: A primeira interação com o equipamento M prepara o sistema para um dos dois estados. Experimentos subsequentes confirmam esse estado. Até agora, não há diferença entre a Física Clássica e a Quântica.

Agora vamos fazer algo novo. Depois de preparar a rotação e medindo com M , é dada uma rotação de 180° no equipamento sem perturbar o *spin* previamente medido. O que encontramos é que se nós originalmente preparamos $\xi = +1$, o equipamento invertido registra $\xi = -1$. Da mesma forma, se originalmente fixássemos $\xi = -1$, o equipamento invertido registra $\xi = +1$. Em outras palavras, intercambiamos a rotação do equipamento $\xi = +1$ e $\xi = -1$. A partir desses resultados, podemos concluir que ξ é um *grau de liberdade* associado ao *senso de direção no espaço*. Por exemplo, se ξ fosse um vetor orientado de algum tipo, então seria natural esperar que virando o equipamento inverteria a leitura. Uma explicação simples é que o equipamento *mede* o componente do vetor ao longo de um “eixo embutido no aparelho”.

Figura 12 O aparelho é girado sem perturbar a rotação previamente medida. Uma nova medição resulta em -1



Fonte [Susskind & Friedman, 2015].

Se de fato ξ realmente representa a componente de um vetor ao longo da *seta para cima*, espera-se obter zero. Por quê? Inicialmente, confirmamos que σ estava direcionado ao longo do eixo z , sugerindo que sua componente ao longo de x deve ser zero. Mas temos uma surpresa quando medimos ξ_x : em vez de registrar $\xi_x = 0$, o aparelho registra $\xi_x = +1$ ou $\xi_x = -1$. O aparelho apresenta um “registro teimoso”, não importa para que sentido esteja orientado, ele se recusa a oferecer qualquer resposta que não seja $\xi = \pm 1$. Se o spin é realmente um vetor, é realmente muito peculiar. No entanto, o experimento repetido mostra mais ou menos uma série aleatória. Há uma quebra do determinismo, mas de uma maneira particular. Se fizermos muitas repetições, descobriremos que os números de eventos $\xi = +1$ e eventos $\xi = -1$ são estatisticamente iguais. Em outras palavras, o valor médio de ξ é zero. Em vez do resultado clássico, ou seja, que o componente de ξ ao longo do eixo x é zero, descobrimos que a *média dessas medições repetidas* é que tem valor zero.

Figura 13 Equipamento sofre uma rotação angular arbitrária no plano x - z . A medida resultante é dada pelo valor médio do produto escalar entre os vetores



Fonte [Susskind & Friedman, 2015].

Agora repetindo, mas em vez de girar M para coincidir com o eixo x , gire-o em uma direção arbitrária ao longo do vetor unitário \hat{z} . Classicamente, se ξ fosse um vetor, esperaríamos que o resultado do experimento fosse a componente de ξ ao longo do eixo x . Se ξ estiver em um ângulo θ em relação a z , a resposta clássica seria $\langle \xi_x \rangle = \cos \theta$. Mas, como você pode imaginar, cada vez que fazemos o experimento, obtemos $\langle \xi_x \rangle = +1$ ou $\langle \xi_x \rangle = -1$. No entanto, o resultado é estatisticamente fortemente inclinado, de modo que o *valor médio* é $\cos \theta$. Um novo experimento no mesmo giro dará resultados aleatórios ± 1 , mas com um valor médio igual ao cosseno do ângulo entre \hat{x} e \hat{z} . Em outras palavras, a média será $\cos \theta$. Podemos resumir os resultados de nossa experimentação mental como segue: Se começarmos com M orientado ao longo de \hat{z} e confirmarmos que $\xi = +1$, então a medição subsequente com M orientado ao longo de \hat{x} dará o resultado estatístico $\cos \theta$.

DOS PARÊNTESES DE POISSON A REPRESENTAÇÃO DE DIRAC.

Um pequeno relato sobre o importante conceito introduzido por Paul A. M. Dirac em 1925 na Mecânica Quântica que representa a *matemática básica da programação quântica*. O estado de uma partícula é definido pela *amplitude* $\psi(x,t)$ e o valor médio esperado da grandeza física $x(t)$ é dado por

$$(40) \underbrace{\langle x(t) \rangle}_{\text{valor médio}} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \underbrace{|\psi(x,t)|^2}_{\substack{\text{densidade} \\ \text{de} \\ \text{probabilidade}}} dx$$

Isso não significa que serão realizadas várias medidas para determinar o valor médio como ocorre em experimentos convencionais de laboratório. É a média $\langle x(t) \rangle$ das medições feitas, todas no estado $\psi(x,t)$. Significa, separar um conjunto de partículas, cada uma no mesmo $\psi(x,t)$ e medir a posição de todas elas: $\langle x(t) \rangle$ é a *média dos resultados*. Richard Feynman [Feynman, 1948] fez isso para todas as trajetórias possíveis de uma mesma partícula. Considere agora a pergunta: *Qual prioridade deve existir: a do tempo sobre o espaço ou vice-versa?* Nenhuma das duas, o que ocorre na realidade é bem diferente e a melhor resposta está na *otimização*, não há mais necessidade da *causalidade*. Como anteriormente foi discutido [Amado, 2021], o

resultado de uma *medição* é um número. Devemos ter *números* bem como *símbolos abstratos de medição* e nessa Álgebra, as *definições óbvias dos números básicos 1 e 0* são:

$$(41) \underbrace{1}_{\text{número}} \cdot |a_i a_j| = |a_i a_j| \quad \text{e} \quad \underbrace{0}_{\text{número}} \cdot |a_i a_i| = \overset{\text{símbolo}}{\widehat{0}}$$

Dessa forma, valem os produtos

$$(42) |a_i a_j| |a_k a_\ell| = \begin{cases} |a_i a_\ell| = 1 \cdot |a_i a_\ell| \Leftrightarrow a_j = a_k \\ 0 \cdot |a_i a_\ell| = 0 \Leftrightarrow a_j \neq a_k \end{cases}$$

Portanto

$$(43) |a_i a_j| |a_k a_\ell| = \delta \cdot (a_j, a_k) |a_i a_\ell| \text{ com } \delta \cdot (a_j, a_k) = \begin{cases} 1 \Leftrightarrow a_j = a_k \\ 0 \Leftrightarrow a_j \neq a_k \end{cases}$$

Observe outro fato,

$$(44) \begin{cases} 1 \cdot |a_i a_j| + 1 \cdot |a_i a_j| = (1 + 1) |a_i a_j| \\ 1 \cdot |a_i a_j| + 1 \cdot |a_i a_j| = 2 \cdot |a_i a_j| \end{cases}$$

O conceito de *estado* de um sistema quântico foi estabelecido no parágrafo anterior, então pensando um pouco mais sobre o que significa a operação $|a_i, a_j|$, no experimento de Stern e Gerlach, onde apenas uma partícula identificada com o valor a_i da propriedade A, um breve a_j , permite uma leitura

Figura 14 A figura sugere a possibilidade de representar o estado de spin de um átomo de prata no experimento de Stern e Gerlach, por um tipo de vetor em um novo tipo de espaço vetorial bidimensional (espaço binário).



O resultado na saída é uma partícula a_j . É como se a partícula em princípio a_i fosse destruída e em seu lugar fosse criada uma partícula a_j . Este é um processo mental de duas etapas que é indistinguível do mundo real. Sugere a possibilidade de representar o estado de spin de um átomo de prata no experimento, por um *tipo de vetor em um novo tipo de espaço vetorial bidimensional*, um *espaço vetorial abstrato* que não deve ser confundido com o espaço bidimensional usual.

Com base nos princípios gerais da Mecânica Quântica, a propriedade A será medida com o valor a_i quando entra no equipamento; e como resultado na saída da será a_j . Paul A. M. Dirac [Dirac, 1939] desenvolveu uma notação padrão para representar os estados quânticos para tais processos, também é utilizada para denotar *vetores e funcionais lineares abstratos na Matemática*. A notação associa a cada estado dinâmico é um certo tipo de vetor denominado

vetor *ket* e representado pelo símbolo $|\rangle$. Assim por exemplo o *ket* u é representado pelo símbolo $|u\rangle$. Os *kets* formam um *espaço vetorial linear* em *infinitas dimensões*², portanto qualquer combinação linear de *kets* tem como resultado um vetor *ket*. O *estado físico* por exemplo no experimento SG usando átomos de prata é representado por

$$(45) |u\rangle = \alpha|u_1\rangle + \beta|u_2\rangle$$

A soma é um *ket*.

Também é conhecido da Álgebra Linear, que podemos associar ao *espaço vetorial*, um *espaço vetorial dual*. Dessa forma qualquer função linear dos *kets* possui uma propriedade de superposição característica dos vetores que conseqüentemente é denominada *vetor bra* representado pelo símbolo $\langle|$. Assim uma função qualquer $f(|u\rangle)$ define o *bra* $\langle f|$. O valor que a função toma para um *ket* $|u\rangle$ particular é um *número complexo* em geral **que** é representado pelo símbolo $\langle f|u\rangle$.

Então pode-se assim representar a ideia discutida simbolizada como

$$(46) \overbrace{|a_i a_j|}^{\substack{a_i \text{ entra} \\ e \text{ sai } a_j}} \equiv \underbrace{|a_i\rangle\langle a_j|}_{\substack{a_i \text{ destruído} \\ a_j \text{ criado}}}$$

Isso representa um passo à frente, um produto de dois símbolos de um novo tipo. O produto é conhecido como o *produto externo*, sendo considerado como um *operador*; portanto, é fundamentalmente diferente do produto interno, que é apenas um número. Um *operador* deve atuar à esquerda de um *ket* ou à direita de um *bra*.

Axioma 2. Propriedade Associativa.

Dado o *operador* e o *ket* vale a associatividade:

$$(47) (|a_i\rangle\langle a_j|) \cdot |a_k\rangle = |a_i\rangle(\langle a_j|a_k\rangle)$$

Se houver compatibilidade das propriedades algébricas apreendidas com a simbologia $|a_i a_j|$ com a simbologia de Dirac, então ficará confirmada a validade da álgebra do processo experimental; assim

$$|a_i\rangle\langle a_j|a_k\rangle\langle a_\ell| = \delta(a_j, a_k)|a_i\rangle\langle a_\ell| = \langle a_j|a_k\rangle$$

Portanto

$$(48) \langle a_j|a_k\rangle = \delta(a_j, a_k)$$

O significado físico é consistente desde que se considere que a_j represente a situação *final* e a_k a situação *inicial*

$$(49) \langle a_j|a_k\rangle = \begin{cases} a_i = a_j : \text{Sim, representado por } 1 \\ a_i \neq a_j : \text{Nao, representado por } 0 \end{cases}$$

Agora, de forma mais geral relativo ao experimento de SG, primeiro medimos alguma propriedade **A** e selecionamos o resultado particular a_i que simbolizamos pela criação de uma partícula a_i indicando . Sequencialmente é realizada uma outra medição **B** (sem especifica-

² Espaço de Hilbert, denominação dada após David Hilbert, em sua publicação de 1912, generalizar a noção de Espaço Euclidiano. Ele estendeu os métodos da Álgebra Vetorial e Cálculo do espaço tridimensional para espaços com qualquer número de dimensões, in BOURBAKI, 2003 e BOURBAKI, 1967.

ção) e simbolizado por $M()$ de tal modo que Na etapa final ocorre a aniquilação (detecção) de $a_i = \alpha$ produzindo um número que é uma *probabilidade*

$$(50) \quad \mathcal{P}(a_i, M(B)) = \langle a_i | M(B) | a_i \rangle$$

Podem ser considerados *três tipos de medição*:

1ª) a medida B que seleciona b_m

$$(51) \quad M(B) = |b_m\rangle\langle b_m| \Rightarrow \mathcal{P}(a_i, |b_m, b_m\rangle) = \mathcal{P}(a_i, b_m) = \langle a_i | b_m \rangle \langle b_m | a_i \rangle$$

2ª) a medida B que seleciona qualquer b_m ou b_n onde $b_m \neq b_n$

$$(52) \quad M(B) = |b_m\rangle\langle b_m| + |b_n\rangle\langle b_n|$$

$$\mathcal{P}(a_i, b_m \text{ ou } b_n) = \langle a_i | b_m \rangle \langle b_m | a_i \rangle + \langle a_i | b_n \rangle \langle b_n | a_i \rangle = \mathcal{P}(a_i, b_m) + \mathcal{P}(a_i, b_n).$$

3ª) a medida B que seleciona todo b_m sem influencia

$$(53) \quad M(B) = \sum_m |b_m\rangle\langle b_m| = 1$$

$$(54) \quad \mathcal{P}(a_i, 1) = \sum_m \langle a_i | b_m \rangle \langle b_m | a_i \rangle = \langle a_i | 1 | a_i \rangle = \sum_m \mathcal{P}(a_i, b_m) = 1$$

Então é verdade que a *medição menos específica* que seleciona b_m ou b_n , que tem ambos os átomos feixe transmitido, tem um resultado com a maior probabilidade:

$$(55) \quad \mathcal{P}(a_i, b_m) + \mathcal{P}(a_i, b_n)$$

Esse é o resultado da *medição menos específica* e que tem a *maior probabilidade*. No caso da medida B , quando ela for apenas A , supondo também que $b_m = a_j$,

$$(56) \quad \mathcal{P}(a_i, a_j) = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow a_i = a_j \\ 0 & \Leftrightarrow a_i \neq a_j \end{cases} \Rightarrow \delta(a_i, a_j)$$

Realmente

$$(57) \quad \langle a_i | a_j \rangle \langle a_j | a_i \rangle = [\delta(a_i, a_j)]^2 = \delta(a_i, a_j)$$

Que tipo de números são os tal que está neste intervalo e não é um número negativo ou complexo. Existem duas possibilidades:

$$i) \langle a_i | b_m \rangle \in \mathbb{R} \text{ e } \langle a_i | b_m \rangle = \langle b_m | a_i \rangle \therefore \mathcal{P}(a_i, b_m) = [\langle a_i | b_m \rangle]^2 \geq 0$$

Automaticamente desde que a soma de todas as *probabilidades não negativas* seja igual a 1. Na verdade, um esquema apenas com números reais, no qual não existe número ao quadrado igual a -1, não funciona.

$$ii) \langle a_i | b_m \rangle \in \mathbb{C} \text{ e } \langle b_m | a_i \rangle = \langle a_i | b_m \rangle^* \therefore \mathcal{P}(a_i, b_m) = [\langle a_i | b_m \rangle]^2 \geq 0$$

A construção de probabilidades como quadrados absolutos fornece um nome para os números complexos : *amplitude de probabilidade*. Representa, portanto, a *amplitude de probabilidade* de ir de um estado qualquer para outro. É fácil verificar que se *operador X* é dado por então seu conjugado

$$(58) X = |x_i\rangle\langle x_j| \Rightarrow X^* = |x_j\rangle\langle x_i|$$

Devido ao Axioma 2

$$(59) ((x_j|)(X|x_i)) = ((x_j|X)(|x_i)) \equiv \langle x_j|X|x_i\rangle$$

Portanto, para o operador hermitiano X

$$(60) \langle x_j|X|x_i\rangle = \langle x_i|X|x_j\rangle^*$$

Teorema 6

Os autovalores de um operador X hermitiano são reais, os autokets de X correspondentes aos diferentes autovalores são ortogonais.

Seja

$$X|x_1\rangle = x_1|x_1\rangle$$

Por hipótese X é hermitiano, então

$$\langle x_2|X = x_2^*\langle x_2|$$

Aqui x_1, x_2, x_3, \dots são os autovalores de X . Multiplicando a primeira por a esquerda

$$\langle x_2|X|x_1\rangle = \langle x_2|x_1|x_1\rangle$$

Multiplicando a segunda por a direita e subtraindo

$$\langle x_2|X|x_1\rangle = x_2^*\langle x_2|x_1\rangle$$

$$\langle x_2|x_1|x_1\rangle - x_2^*\langle x_2|x_1\rangle = x_1\langle x_2|x_1\rangle - x_2^*\langle x_2|x_1\rangle = (x_1 - x_2^*)\langle x_2|x_1\rangle = 0$$

Os valores x_1 e x_2 podem ser iguais ou diferentes. Supondo que são diferentes

$$(x_1 - x_2^*) = (x_1 - x_2)$$

Não são nulos, então

$$\langle x_2|x_1\rangle = 0$$

O que prova a ortogonalidade. O teorema garante a realidade dos autovalores sempre que o operador for hermitiano.

Em relação a medição, é fato que sempre faz com que o sistema salte para um estado próprio da variável dinâmica que está sendo medida. Isso significa que antes que uma medição do observável A seja feita, o sistema é assumido como representado por alguma combinação linear dos kets

$$(61) |\alpha\rangle = \sum_i c_{a_i}|a_i\rangle = \sum_i |a_i\rangle\langle a_i|\alpha\rangle$$

Quando a medição é realizada, o sistema assume um dos autoestados do observável A , por exemplo $|a_i\rangle$, ou seja

$$(62) |\alpha\rangle \xrightarrow{\text{medida de } A} |a_i\rangle$$

É instrutivo considerar o caso da partícula com spin S como na experiência de SG, representando na base ket $|S, +\rangle$ ou $|S, -\rangle$ por exemplo, quando um átomo de prata com uma orientação de spin arbitrária mudará para qualquer S . Portanto, uma medição geralmente muda

o estado (como mostrado nos parágrafos anteriores). A única exceção é quando o estado já está em um dos *autoestados do observável* sendo medido, caso em que

$$(63) \quad |a_i\rangle \xrightarrow{\text{medida de } A} |a_i\rangle$$

Quando a medição faz com que $|\alpha\rangle$ mude para $|a_i\rangle$, diz-se que A é medido como a_i . É nesse sentido que o resultado de uma *medição* produz um dos *autovalores do observável* sendo medido.

O estado de um sistema físico antes da medição, não permite saber com antecedência em qual dos vários $|a_i\rangle$ o sistema será definido como *resultado da medição*, dado por

$$(64) \quad |\alpha\rangle = \sum_i c_{a_i} |a_i\rangle = \sum_i |a_i\rangle \langle a_i | \alpha \rangle$$

No entanto, a *probabilidade* ou mais corretamente, a *amplitude de probabilidade*, de saltar para algum $|a_i\rangle$ em particular é dada por

$$(65) \quad \mathcal{P}(|a_i\rangle) = |\langle a_i | \alpha \rangle|^2$$

Embora o comentário seja sobre um único sistema físico, para determinar essa *amplitude de probabilidade* empiricamente, deve-se considerar um *grande número de medições realizadas em um conjunto*; isto é, uma coleção de sistemas físicos preparados de forma idêntica, todos caracterizados pelo mesmo ket $|\alpha\rangle$.

A interpretação da *amplitude de probabilidade* para o quadrado do produto interno $(\langle a_i | \alpha \rangle)^2$ é uma postulação fundamental da Mecânica Quântica. Refletindo sobre isso para um caso extremo, onde um suposto estado ket $|a_i\rangle$ resultado da *medição* para ser igual a 1, que é justamente esperado. Realizando novamente a *medição* de A , é obtida claro, apenas $|a_i\rangle$; pois as *medições repetidas* e sucessivas do mesmo *observável* produzem o mesmo resultado. Se, por outro lado, estamos interessados amplitude de probabilidade do sistema inicialmente caracterizado por $|a_i\rangle$ assumir algum outro *autoket* $|a_j\rangle$ com $a_i \neq a_j$, então a *amplitude de probabilidade* se anula devido a ortogonalidade entre os kets.

Do ponto de vista da *teoria da medição*, kets ortogonais correspondem mutuamente a alternativas exclusivas como por exemplo no caso dos *spins*, se o sistema está em $|S, +\rangle$ certamente não estará em $|S, -\rangle$. Além disso, as *probabilidades* para as várias possibilidades alternativas devem totalizar a unidade. Ambas as expectativas são atendidas pela *amplitude de probabilidade* para $\mathcal{P}(|a_i\rangle)$.

O *valor esperado* (não é *autovalor*) do *observável* A tomado em relação ao estado $|\alpha\rangle$

$$(66) \quad \langle A \rangle = \langle \alpha | A | \alpha \rangle$$

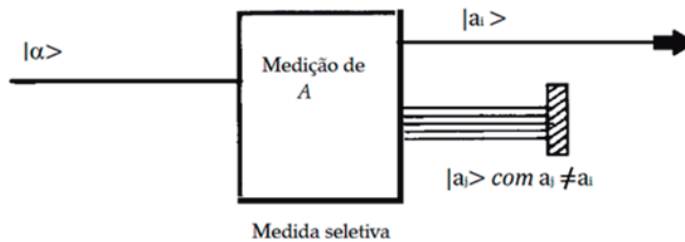
Para ter certeza de que estamos nos referindo ao estado $|\alpha\rangle$, pode-se usar uma a notação $\langle A \rangle_\alpha$ para simplificar; mas $\langle A \rangle = \langle \alpha | A | \alpha \rangle$ é uma definição; no entanto, concorda com a noção intuitiva de *valor médio medido* porque pode ser escrita como

$$(66) \quad \langle A \rangle = \sum_i \underbrace{a_i}_{\substack{\text{valor} \\ \text{medido}}} \overbrace{|\langle a_i | \alpha \rangle|^2}^{\text{probabilidade de obter } a_i}$$

Para esclarecer ainda mais o significado das *medições na Mecânica Quântica*, usa-se a noção de uma *medição seletiva*, ou *filtro*. No parágrafo III.1 foi considerado o arranjo do experimento

de SG. Esse experimento permite o uso de um bloqueio para um dos componentes e dessa forma apenas um dos componentes de spin sai do aparelho, como na figurinha

Figura 15 A medição idealizada no diagrama é seletiva e realizada pelo equipamento, bloqueando uma das componentes, análogo a polarização da luz e ao experimento de Stern- Gerlach.



Matematicamente, podemos dizer que tal medida seletiva equivale a aplicar o *operador* $|a_i\rangle\langle a_i|$ sobre $|\alpha\rangle$, ou seja $|a_i\rangle\langle a_i|\alpha\rangle$. Então, é possível apresentar algumas conclusões essenciais:

- i) A propriedade de composição das funções transformação e sua interpretação em *amplitudes de probabilidade* implicam que a álgebra de medição pode ser realizada como um conjunto de *operadores lineares em um espaço complexo* com métrica *hermitiana*.
- ii) Com cada estado máximalmente filtrado (isto é, puro) é caracterizado pelos números quânticos, a_i , associado associar um vetor *ket* $|a_i\rangle$ e um vetor dual *bra* $\langle a_i|$, onde o conjunto $\{|a_i\rangle\}$ é uma base ortonormal do espaço vetorial e $\{\langle a_i|\}$ é uma base ortonormal do espaço vetorial dual.
- iii) A *medição* é um *operador projeção* $|a_i\rangle\langle a_i|$ sobre o estado $|\alpha\rangle$, sendo *operador hermitiano* correspondendo ao *observável* A , onde $|a_i\rangle$ é o *autoket* de A cujo *autovalor* é a_i .
- iv) Somente *operadores hermitianos* com um conjunto completo de *autokets* podem ser candidatos a *observáveis*.
- v) A álgebra dos observáveis e o produto escalar entre estados (as *probabilidades*) são invariantes sob transformações unitárias (uma afirmação aqui feita sem demonstrar) e como consequência *operadores unitários* formam um *grupo*.
- vi) Como qualquer *ket* pode ser definido a partir de outro por uma *combinação linear de símbolos de medição*, todos os *kets* devem ter significado físico, ou seja, correspondem aos *estados físicos* [Gottfried, 2018]

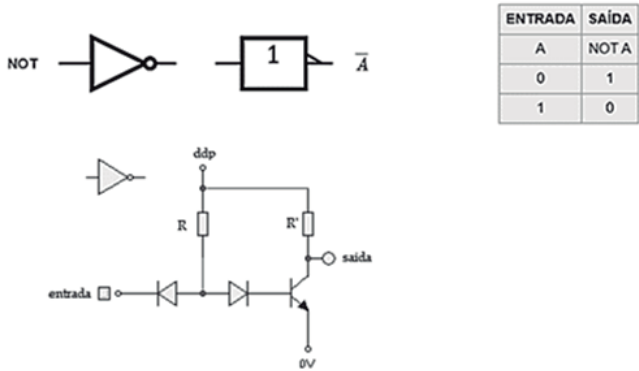
FÍSICA E COMPUTADORES

Em meados da década de 1970, a partir do aperfeiçoamento do *hardware*, uma longa série de aperfeiçoamentos tecnológicos originário das pesquisas em Física no domínio dos *semicondutores*, levou a invenção do *transistor* (*transfer resistor*, um dispositivo semiconductor) substituindo as válvulas eletrônicas (que suprimia todos os atritos mecânicos que constituíam um limite intransponível da velocidade das operações, como aquelas da *máquina de Babbage*, mas limitadas pelo alto consumo de energia e geradora de calor, as perdas térmicas).

A utilização das *memórias de núcleos magnéticos*, levou alguns físicos a questionar as possíveis conexões entre Física e Computação. Inicialmente, esses esforços se concentraram em entender a Termodinâmica da Computação clássica [Amado, 2002], fazendo perguntas sobre a quantidade de energia que poderia ser gasta para realizar um determinado processamento, o quanto de calor é dissipado quando um bit é apagado da memória, existindo limites fundamentais na taxa de informações que podem ser processadas e se existe um limite superior para a velocidade de processamento [Margolus, 1996; Deutsch, 1982; Amado, 2002].

A idealização teórica de computadores hipotéticos levou a *experimentos mentais* que revelaram algumas conexões intrigantes entre a *reversibilidade lógica* e a *reversibilidade termodinâmica*. Certas operações lógicas, como a operação NOT, são *logicamente reversíveis* porque, dado o conhecimento do bit de saída, você pode inferir o bit de entrada sem ambiguidade e vice-versa.

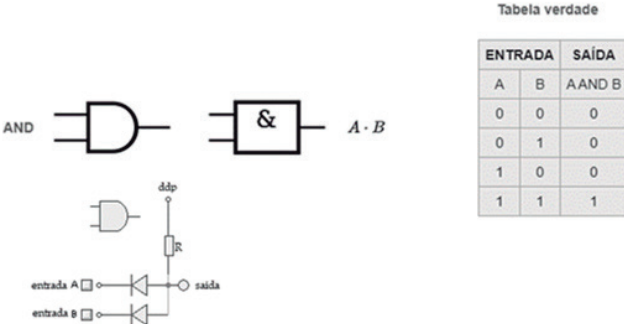
Figura 16 Diagrama de bloco e circuito hipotético equivalente



Fonte [Clewater and Williams, 1997]

Por outro lado, outras operações, como o bit a bit - AND (&) de dois bits, são logicamente irreversíveis porque nem sempre é possível inferir os bits de entrada com o conhecimento apenas do bit de saída. Por exemplo, se o bit de saída for 0, os bits de entrada podem ser 00, 10 ou 01.

Figura 17 Operação de dois bits



Fonte [Clewater & Williams, 1997]

Em 1987 o físico da IBM Charles H Bennett, com base no trabalho de Leo Szilard (1898-1964) publicado em 1929, mostrou que qualquer operação lógica irreversível *dissiparia uma quantidade mínima de energia*. Na verdade, isso ocorre sempre que um processamento computacional *descarta informações*, como tomar o *bit a bit AND* de dois bits, **0** e **1** ou apagar um *bit* de um registro de memória. No entanto, uma *operação logicamente reversível* não precisa dissipar energia. Bennett foi capaz de mostrar que uma *máquina de Turing logicamente reversível completa* era uma possibilidade teórica [Bennet, 1973]. No entanto, para realmente construir um *computador reversível*, seriam necessárias *portas lógicas reversíveis*.

Assim, tornou-se uma questão interessante saber se existia uma *porta lógica clássica que fosse reversível* (no sentido de que suas entradas pudessem ser usadas para inferir suas saídas e vice-versa) e *universal* (no sentido de que qualquer função computável pudesse ser calculada usando um circuito construído com tais portas). *A priori* não era muito claro se tal *porta lógica* seria possível.

Em 1982, o físico italo-americano Tommaso Toffoli, um dos pais do *autômato celular* [Amado, 1996] e o físico norte americano Edward Fredkin do Laboratório de Ciências da Computação do MIT, criaram uma *porta lógica* provando que as Leis da Física Clássica permitiriam uma reversibilidade universal de uma porta lógica clássica [Fredkin & Toffoli, 1982]. Posteriormente esse dispositivo foi redesenhado de uma maneira mais prática usando fons para codificar *bits* com as técnicas da Óptica não linear, foi implementado pelo físico teórico australiano Gerard J. Milburn desenvolveu um modelo óptico simples para uma *porta lógica reversível e potencialmente livre de erros* em condições operacionais muito específicas, um dispositivo que não dissipa energia e faz uso da não linearidade para produzir mudanças de fase dependentes da intensidade. Seu estudo é um dos primeiros que envolve diretamente os conceitos da Mecânica Quântica [Milburn, 1989].

No início da década de 1980 norte americano Paul Bennioff, do Argonne National Laboratory, baseou-se nos resultados anteriores do físico teórico alemão Rolf Landauer (1927-1999) um especialista em *física da informação* (aluno do físico francês Léon Nicolas Brillouin, praticamente o criador da Ciência e Teoria da Informação) e Charles Bennett, para mostrar que um computador poderia, em princípio, funcionar de maneira puramente quântica [Bennioff, 1980]. Ele idealizou um modelo quântico da *máquina de Turing*, baseado no clássico estudo de Bennett das *máquinas de Turing reversíveis*, já comentado acima. Mostrou que para cada número na *máquina de Turing Q*, existiria uma *função hamiltonian \mathcal{H}* e uma classe de estados iniciais apropriados ψ_Q de tal modo que se $\psi_Q^N(0)$ é um estado inicial, então para qualquer instante temporal t , implica . Logo depois, David Deutsch, do Instituto de Matemática da Universidade de Oxford, e outros cientistas nos EUA e em Israel começaram a *modelar computadores quânticos* para descobrir como eles poderiam diferir dos clássicos. Em particular, eles se perguntavam se os efeitos da Mecânica Quântica poderiam ser explorados para acelerar os cálculos ou para realizar cálculos de novas maneiras.

A primeira ramificação, chamada de observação paralela, é: Você pode fazer isso com um novo tipo de computador, um *computador quântico*? Richard Feynman [Feynman, 1985] apresentou a resposta mostrando que é possível simular isso num sistema quântico, como elementos de *computador quântico*. Não é uma máquina de Turing, mas uma máquina de um tipo diferente. Iniciamos *desconsiderando* a continuidade do espaço e a tornando *discreta*, e assim por diante, como uma aproximação, da mesma forma que nos permitimos fazer no caso clássico. O Princípio da Incerteza não ofereceria algum impedimento? Não necessariamente; pois um resultado da Ciência da Computação conhecido é que um *computador universal* pode

ser idealizado a partir de uma rede adequadamente complexa de elementos primitivos interconectados.

Seguindo a análise clássica usual, podemos imaginar as interconexões como condutores ideais sob tensões padrão, representando os estados **1** e **0**, que classicamente representa a unidade de informação elementar (um sistema físico pode ser, por exemplo, um interruptor que pode estar *aberto 0* ou *fechado 1*, ou um ímã cuja magnetização pode ser orientada em duas direções diferentes, *para cima 0* ou *para baixo 1*). O *análogo quântico* de um *bit* seria como uma *partícula de dois estados*; e estendendo a prática comum em usar o mesmo termo *bit* que descreve o sistema clássico de dois estados para representar o valor do *bit abstrato*. Mas o uso de um único termo para caracterizar tanto o *bit abstrato* (**0** ou **1**) quanto o sistema físico, cujos dois estados representam os dois valores é uma fonte potencial de confusão. Para evitar tal confusão, podemos fazer analogia com Paul Dirac para descrever quantidades clássicas e suas generalizações da Mecânica Quântica: o *c-number* e *q-number*; então teríamos o termo *C-bit* (C de clássico) para descrever o sistema físico clássico de dois estados e *Q-bit* para descrever sua generalização quântica. Esta terminologia acabou sendo aceita com uma pequena alteração: *bit* (para o clássico) e *Q-bit* para descrever sua generalização quântica, que infelizmente foi adaptado absurdamente para o *qubit* ortográfico (não confundir com a medida inglesa *cubit*), uma invenção de Benjamin Schumacher [Schumacher, 1995].

A denominação surgiu a partir da analogia entre o conceito de *entropia de um sistema quântico* proposta pelo gênio da Matemática do séc. XX, John von Neumann (1903- 1957) [Neumann, 1996], um aluno do lendário matemático húngaro László Rátz (1863 - 1930) e o conceito de *entropia* do pai da Teoria da Informação, o engenheiro eletrônico norte-americano da AT&T- Bell Laboratories, Claude E Shannon (1916- 2001)

$$(67) \quad \begin{aligned} \text{Entropia de Shannon } H(A) &= -\sum_a \mathcal{P}(a) \log_2 \mathcal{P}(a) \\ \text{Entropia de von Neumann } S(\rho) &= -\text{Tr} \rho \cdot \log_2 \rho \end{aligned}$$

De fato, se nós interpretarmos as probabilidades $\mathcal{P}(a)$ da *entropia de Shannon* como os autovalores do *operador densidade* ρ da *entropia de Neumann*, então $S(\rho)$ é numericamente igual a $H(A)$. Embora com aparente similaridade esses dois conceitos são igualmente diferentes, pois a diferença é percebida quando se considera uma *fonte de sinal quântico*, que pode ser parte de um sistema de comunicação quântica, um dispositivo que codifica cada mensagem a da fonte A em um estado-sinal $|a_Q\rangle$ de um sistema quântico Q . Então o conjunto de sinais da fonte de sinal irá ser definido a partir dos *operadores densidade* π_a , que são as *projeções* $\pi_a = |a_Q\rangle\langle a_Q|$ (usando aqui a notação apreendida acima)

$$(68) \quad \rho = \sum_a \mathcal{P}(a) \pi_a$$

A *entropia* $S(\rho)$ de von Neumann será igual a *entropia da mensagem de Shannon* somente no caso particular quando os sinais $|a_Q\rangle$ forem *ortogonais entre si*, revelando aqui os *auto-estados* de ρ . Nos casos em que isso não acontece $S(\rho) < H(A)$ e os auto-estados ρ podem não ser uma relação simples envolvendo os *estados sinal*. Então nenhum *observável decodificado* será suficiente para recuperar o conteúdo completo da informação da mensagem emitida pela fonte de sinais quânticos. O *teorema de Holevo* [Schumacher, 1995; Holevo, 1998] prevê a conexão, dando uma informação teórica sobre o significado de $S(\rho)$, não prevendo a interpretação em termos de *informação clássica*; e dessa maneira as *unidades de informação quântica*, os *q-bits* na *entropia de von Neumann* de um sistema vão representar o *número médio de unidades de informação* necessários para codificar os estados do sistema num processo de codificação ideal. Então a

entropia quântica S é a medida dos recursos físicos necessários para representar o conteúdo de informação de um sistema [Stonier, 1990] em *estados mistos*, uma vez que o *estado misto* surge a partir do *processo estocástico* ou pelo rastro decorrente do entrelaçamento quântico com o mundo externo. A *entropia quântica* é medida em Q -bits.

Os únicos estados que um C -bit pode ter são definidos pelos vetores bidimensionais ortonormalizados $|0\rangle$ e $|1\rangle$; os únicos vetores com algum significado clássico em todo o *espaço vetorial bidimensional*. Felizmente, a natureza nos forneceu sistemas físicos, Q -bits, descritos por estados que não sofrem dessa limitação. É prática comum chamar o símbolo $|0\rangle$ ou $|1\rangle$ de estado do C -bit, usando assim o mesmo termo para se referir tanto à condição física do C -bit quanto ao símbolo abstrato que representa essa condição física. Não há nada de incomum nisso, por exemplo, geralmente se usa a palavra *posição x* na Mecânica para se referir a posição física de uma partícula ou corpo. Isso é uma prática comum, embora pouco notada, chamando a atenção para o fato que no caso quântico, *estado* se refere apenas ao símbolo, *não havendo propriedade interna* do Q -bit que o símbolo representa. É um *vetor de estado unitário* pertencente a um *espaço vetorial complexo*, o *espaço bidimensional de Hilbert* identificado com \mathbb{C}^2 , conhecido como *espaço dos estados*; o Q -bit, é portanto, descrito por sistemas de dois níveis da Mecânica Quântica, como os dois estados de spin $1/2$ ou os estados de polarização transversal e longitudinal de um único fóton, com a diferença em relação ao C -bit de que o *estado físico* é descrito por amplitudes complexas.

Dessa forma podemos matematicamente sempre identificar o *espaço bidimensional de Hilbert* com \mathbb{C}^2 (o *espaço Q -bit* onde está estocada a informação contida no Q -bit) escolhendo convenientemente o conjunto máximo dos pares de vetores unitários ortogonais, linearmente independentes num espaço linear munido do produto escalar. Como na Mecânica Quântica o espaço dos estado de um sistema quântico consistindo das posições, momentos, polarizações, spins, etc de várias partículas é modelado no espaço de Hilbert das funções de onda, na Computação Quântica são necessários apenas os sistemas quânticos finitos o suficiente para considerar o espaço vetorial complexo dimensionalmente finito, munido do produto interno o que portanto não ocorre no mundo da computação clássica, onde cada C -bit é mapeado por “partículas quânticas” de dois estados, os Q -bits (não valendo o inverso). Quando trabalhamos com n Q -bit, cada um é vetor unitário no *espaço de Hilbert* $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^2$; com uma base natural para esse espaço consistindo de 2^n vetores

$$(69) \quad \begin{array}{l} |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \cdots \otimes |0\rangle \\ |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \cdots \otimes |1\rangle \\ \vdots \\ |1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle \cdots \otimes |1\rangle \end{array}$$

que por brevidade os *produtos tensoriais* são identificados por

$$(70) \quad |x_1\rangle \otimes |x_2\rangle \otimes |x_3\rangle \cdots \otimes |x_n\rangle = |x_1 x_2 x_3 \cdots x_n\rangle = |x\rangle / x \in \mathbb{Z}$$

Portanto uma representação *binária* do número $x \in \mathbb{Z}$, um número entre 0 e 2^{2n-1} . Então por exemplo, o Q -bit é representado no espaço bidimensional $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 = \mathbb{C}^4$ com base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$

$$(71) \quad |0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Em \mathbb{C}^4 os vetores da base operam segundo

$$(72) \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(73) \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(74) \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(75) \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Os vetores serão respectivamente $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$ e $|11\rangle$ e \mathbb{C}^4 é o *espaço das superposições*; de modo que diversas transformações podem ser efetuadas sobre um sistema físico (embora as transformações lineares num espaço vetorial sejam representadas por uma multiplicação matricial), lembrando que a condição de normalização deve ser estar satisfeita pelo estado do sistema quântico antes e após a transformação.

Para um único *Q-bit*, o vetor $|\psi\rangle$ é escrito em forma vetorial como

$$(76) \quad |\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle / a, b \in \mathbb{C} \text{ e } |\psi\rangle\langle\psi| \Rightarrow |a|^2 + |b|^2 = 1$$

Aqui as quantidades $|a|^2$ e $|b|^2$ são as probabilidades que definem se o *Q-bit* está no estado $|0\rangle$ ou $|1\rangle$. Também mais geralmente, pode ser escrito

$$(77) \quad |\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Um estado arbitrário de um sistema com dois *Q-bit* num espaço vetorial de quatro dimensões é escrito na forma

$$(78) \quad |\psi\rangle = a_1|00\rangle + a_2|11\rangle + a_3|10\rangle + a_4|01\rangle / a_i \in \mathbb{C} \text{ e } \sum_{i=1}^4 (a_i)^2 = 1$$

Em geral um sistema com n *Q-bit* pode ser representado por 2^n numa sequência de 2^n *Q-bits* de estados puros distintos por 2^n coeficientes complexos

$$(79) \quad |\psi\rangle = \sum_{i=0}^{2^n-1} a_i \cdot |x_i\rangle / a_i \in \mathbb{C} \text{ e } \sum_{i=0}^{2^n-1} (a_i)^2 = 1$$

Como cada *Q-bit* adicional dobra o número de estados puros representado e posteriormente manipulado por operações lógicas em a cada passo do ciclo que o componente consegue realizar a cada segundo, podemos concluir que a Computação Quântica oferece potencialmente em escala exponencial o poder de computação com apenas um aumento polinomial nos recursos de dados. Os computadores quânticos revolucionarão a computação de uma forma profunda devido à enorme aceleração que eles prometem.

CONCLUSÃO

Este artigo considerou o mínimo teórico para iniciar uma caminhada no estudo da tecnologia nascente da Computação Quântica. Embora a Computação Quântica seja uma extensão da Computação Clássica para o processamento de informações quânticas, usando sistemas como átomos individuais, moléculas ou fótons, tem o potencial para conduzir uma revolução espetacular na Ciência da Computação.

Finalizando com um último exemplo, os átomos de Hidrogênio poderiam ser usados para armazenar *bits de informação* em um Computação Quântico. Um átomo em seu estado fundamental, com seu elétron em seu nível de energia fundamental, pode representar um **0**; o mesmo átomo em estado excitado, com seu elétron em um nível de energia mais alto pode representar um **1**. O bit do átomo, **0** ou **1**, pode ser invertido para o valor oposto usando um pulso de luz laser (em comprimentos de onda do amarelo). Se os fótons no pulso tiverem a mesma quantidade de energia que a diferença entre o estado fundamental do elétron e seu estado excitado, o elétron saltará de um estado para o outro. A leitura do bit que um átomo armazena é feita usando um pulso de laser com a mesma quantidade de energia que a diferença entre o estado excitado do átomo, chamado E_1 , e um estado ainda mais alto e menos estável, E_2 . Se o átomo está em seu estado fundamental, representando um **0**, esse pulso não tem efeito. Mas se estiver em E_1 , representando um **1**, o pulso o empurra para E_2 . O átomo então retornará a E_1 , emitindo um fóton revelador.

A Computação Quântica pode parecer um tópico para ficção científica, mas pequenos computadores quânticos existem há vários anos e máquinas maiores estão na mesa de projetos. Quantidade de informações processadas com recursos de escala linear na melhor das hipóteses, os cálculos quânticos, empregam fenômenos quânticos interagindo para permitir que a quantidade de informação processada esteja numa escala exponencial em termos de no número de bits quânticos, os *qubits*, no sistema.

Ao contrário do que às vezes se lê nas redes sociais e na mídia de popularização, os computadores quânticos não levam a uma computação exponencialmente mais rápida em geral (assim como o emaranhamento leva a uma comunicação mais rápida que a luz). De fato, o conjunto de problemas computacionais até onde sabemos, os computadores quânticos permitem uma aceleração substancial ainda é bastante pequeno, e podemos de fato provar que para muitos outros problemas os computadores quânticos não são melhores que os computadores clássicos [Aaronson, 2008].

Em termos tecnológicos, arquiteturas fazendo uso da tecnologia de semicondutores de óxido metálico complementar CMOS, tem sido propostas, envolvendo baixíssimas temperaturas, da ordem de -150 °C (criogenia); como a chamada Crio-CMOS, que aproveita a infra-estrutura de fabricação CMOS, enquanto explora a contínua melhoria de desempenho e miniaturização possibilitando a fabricação de um *computador quântico prático* como tem sido proposto pela equipe do IARC Centre of Excellence for Engineered Quantum Systems, da University of Sydney, na Austrália [Pauka, et al, 2021]. A eletrônica CMOS criogênica (crio-CMOS) poderá permitir interconexões viáveis e compactas entre o controlador e o processador quântico. No entanto, projetar circuitos integrados crio-CMOS irá requerer um novo conjunto de modelos de dispositivos CMOS, sua incorporação em ferramentas de projeto e verificação, e a possibilidade de co-simular o crio-CMOS/arquitetura do processador quântico para otimização de todo o sistema. Essa possibilidade da utilização da tecnologia crio-CMOS, permite na análise das perspectivas de dimensionamento de sistemas de Computação Quântica uma possibilidade interessante que poderia ser implementada com algumas

alterações no LPCIAD- Laboratório de Projetos de Circuitos Integrados Analógicos e Digitais da Universidade Católica de Santos.

Deixando de ser apenas uma diversão dos físicos teóricos sobre a abengência da Mecânica Quântica (causando pânico entre os matemáticos e cientistas da computação), os Computadores Quânticos estão se aproximando da realização, e eles podem ter um impacto significativo na sociedade em várias áreas. Primeiro, eles poderão quebrar grande parte da criptografia atual, colocando em risco a economia digital, embora também forneçam alternativas criptográficas. Em segundo lugar, eles serão capazes de otimizar melhor todos os tipos de processos, levando a ganhos de eficiência. Terceiro, eles permitirão uma simulação muito mais rápida de sistemas envolvendo os conceitos da Mecânica Quântica, com um melhor potencial para desenvolver design de drogas, materiais, etc.

REFERÊNCIAS

- AARONSON, Scott. The Limits of Quantum Computers, **Scientific American** 298, n° 3, p. 62, 2008.
- AMADO, A. T. F. Instrução continuada em Higiene das Radiações com auxílio de computador, **Leopoldianum**, v. 19, p. 111, 1992.
- AMADO, A. T. F. Processos Quânticos de Computação, **Leopoldianum**, v. 24, p. 131, 1998.
- AMADO, A. T. F. Sistematização da Álgebra dos Processos de Medição. **Leopoldianum**, v 47, p. 153, 2021.
- AMADO, A. T. F. Uma construção matemática para a termodinâmica da computação. **Leopoldianum**, v 28, p. 39, 2002.
- AMADO, A.T.F. Sobre uma classe de abstrações formais dos sistemas físicos: Autômatos Celulares, *SPIN: Caderno do Departamento de Física Química da PUC-MG*, v. 3, n. 5, p.21, 1996.
- BENIOFF, Paul. Quantum Mechanical Models of Turing Machines That Dissipate No Energy, **Phys. Rev. Letters**, v. 48, n. 23, 1982 e Quantum Mechanical Hamiltonian Models of Turing Machines, **Journal of Statistical Physics**, v. 29, n. 3, 1982.
- BENNETT, Charles H. Logical reversibility of computation, **IBM Journal of Research and Development** 17, n° 6, p. 525, 1973.
- BENIOFF, P. The Computer as a Physical System: A Microscopic Quantum Mechanical Hamiltonian Model of Computers as Represented by Turing Machines, **Journal of Statistical Physics**, v. 22, n. 5, 1980.
- BOURBAKI, Nicolas. **Elements of Mathematics: General Topology**. Part 2, chapters 5-10. New York: Addison-Wesley, 1967.
- BOURBAKI, Nicolas. **Algebra II: Chapters 4-7**. New York: Springer Science & Business Media, 2013.
- BRETON, Philippe. História da Informática. Tradução de Élcio Fernandes. São Paulo: Ed. Unesp, 1991.
- CLEARWATER, Scott H., and WILLIAMS Colin P. **Explorations in Quantum Computing**. New York: Springer /Telos, 1997.
- DEUTSCH, David. "Is there a fundamental bound on the rate at which information can be processed?" **Physical Review Letters** 48, n° 4, p. 286, 1982.
- DIRAC, P. A.M. A new notation for quantum mechanics. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, v. 35, n. 3, p.416, 1939.
- DIVINCENZO, David P. Quantum computation, **Science** 270, n° 5234, p. 255 1995.
- FEYNMAN, Richard Phillips. **Feynman Lectures on Computation**. New York: Addison-Wesley Pu. Co. 1996.

- FEYNMAN, Richard Phillips. Quantum mechanical computers, **Optics News** 11, n. 2, p. 11, 1985.
- FEYNMAN, Richard Phillips. Simulating Physics with Computers, *Int. J. Theor. Phys.* v. 21, n. 6/7, 1982.
- FEYNMAN, Richard. Phillips. Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics. **Reviews of Modern Physics**, v. 20, n.2, 1948.
- FONSECA FILHO, Clézio. **História da computação: O Caminho do Pensamento e da Tecnologia**. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2007.
- FREDKIN, Edward and Toffoli, Tommaso. Conservative logic, **International Journal of theoretical physics** 21, n. 3, p. 219, 1982.
- GERLACH, Walther; STERN, Otto. Der experimentelle nachweis der richtungsquantelung im magnetfeld. **Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei**, v. 9, n. 1, p. 349, 1922.
- GERSHENFELD, Neil, and ISAAC L. Chuang. “Quantum computing with molecules.” **Scientific American** 278, n. 6, p. 66, 1998.
- GOTTFRIED, Kurt. **Quantum mechanics: fundamentals**. Boca Raton: CRC Press, 2018.
- HAMILTON, William Rowan. Theory of systems of rays, **The Transactions of the Royal Irish Academy**, v. 15, p. 69, 1828.
- HOLEVO, A.S. The Capacity of the Quantum Channel with General Signal States, **IEEE Transactions on Information Theory**, v. 44, n. 1, 1998.
- IEZZI, G.; HAZZAN, S. **Fundamentos da Matemática Elementar: combinatória e probabilidade**. 5. ed. São Paulo: Ed. Atual, 1985.
- LEECH, John Watson. **Mecânica analítica**. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico & Editora da Universidade de São Paulo, 1971.
- LEMOS, Nivaldo A. **Mecânica analítica**. São Paulo: Ed.Livraria da Física, 2004.
- LLOYD, Seth. Quantum-mechanical computers, **Scientific American** 273, n. 4, p.140, 1995.
- MARGOLUS, Norman, and Levitin, Lev B. The maximum speed of dynamical evolution, **Physica D: Nonlinear Phenomena** 120, n 1-2, p. 188, 1998.
- MILBURN, Gerard J. Quantum optical Fredkin gate, **Physical Review Letters** 62, n. 18, p.2124, 1989.
- PAUKA, S.J. et alls. A cryogenic CMOS chip for generating control signals for multiple qubits, *Nature Electronics*, v. 4, p.64, 2021, Disponível em <www.nature.com/natureelectronics>.
- PENROSE, Roger. **A mente nova do rei: computadores, mentes e as leis da física**. Rio de Janeiro: Campus, 1991.
- RANGEL, Alexandre S. **Proposição do Ensino de Astronomia com auxílio do computador**. Memória apresentada a FFCL, 1991.
- SCHUMACHER, Benjamin. Quantum Coding, **Phys. Rev. A**, v. 51, n. 4, p. 2738, 1995.
- SHOR, Peter W. Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring, *Proceedings 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, p. 124, IEEE, 1994.
- SHOR, Peter W. Polynomial - time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer. **SIAM Review** 41, n. 2, p. 303, 1999.
- SHOR, Peter W. Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory. **Physical Review A** 52, n. 4, p. R2493, 1995.
- STONIER, T. **Information and the Internal Structure of the Universe**. Berlin: Spring Verlag, 1990.
- SUSSKIND, Leonard and FRIEDMAN, Art. **Quantum Mechanics: The Theoretical Minimum**. New York: Basic Books, 2015.
- SUSSKIND, Leonard, and HRABOVSKY, George. **The theoretical minimum: what you need to know to start doing physics**. New York: Basic Books, 2014.

TOFFOLI, Tommaso.- **Reverseble Computing**, MIT-LCS- Technical Memo- 151, 1980.

VON NEUMANN, John. *Mathematical foundations of quantum mechanics*. Princeton: Princeton University Press, 1996.

WEHRL, Alfred. General properties of entropy, **Reviews of Modern Physics**, v. 50, n. 2, p. 221, 1978.

WIENER, Norbert. **Cibernética e sociedade: o uso humano de seres humanos**. São Paulo: Cultrix, 1970.