# DOIS TEOREMAS DE ISAAC NEWTON E A PROVA TOPOLÓGICA DA TRANSCENDÊNCIA DAS INTEGRAIS ABELIANAS.

ANTONIO TADEU F. AMADO*

* Professor de Mecânica Clássica, Física Moderna e História da Matemática. Membro da Equipe de Professores de Problema do Homem Contemporâneo.

**RESUMO**

Analisando as *Leis de Kepler* em duas dimensões, Newton descobriu uma prova topológica surpreendentemente moderna da transcendência das integrais abelianas. Em nosso artigo, descrevemos os dois teoremas de Newton e também alguns outros teoremas matemáticos (mais ou menos explicitamente) contidos nos *Principia Mathematica,* parcialmente sugeridos por Newton.

**PALAVRAS-CHAVE**

Ovais, curvas suaves algebricamente integráveis e *algebricamente não – integráveis*.

## INTRODUÇÃO

Recentemente voltei a trabalhar em um projeto que iniciei um 2018, cujo objetivo é fazer um comentário sobre um manuscrito de Isaac Newton entregue a Edmond Halley, o astrônomo e matemático real, quando este visitou Cambridge em 1684: *De Moto Corporum in Gyrum* (um pequeno tratado de Mecânica Celeste de nove páginas); que acabou por impulsionar a publicação da primeira edição dos *Principia Mathematica* (como é mais conhecido) em 1686. (NEWTON, 1729; 1999; 2002)

Ao fazer a leitura desse documento, que é encontrado nas publicações de John Herivel (HERIVEL, 1965,p. 257) e Derek Thomas Whiteside (WHITESIDE, 1974, p.30) e comparando com as revisões que aparecem nos *Principia* na forma de Proposições, me deparei com dois famosos teoremas matemáticos, os quais coincidentemente tive contato há muitos anos atrás: Proposição XXX seguida do Lema XXVIII. Os matemáticos da época, inclusive o próprio Halley, preocupados em compreender a Mecânica Celeste de Newton, não tomaram consciência desses teoremas, em especial o Lema XXVIII.

Fundamentalmente o fato é que Newton analisando a *2ª Lei de Kepler* em duas dimensões, descobriu uma *prova topológica* surpreendentemente moderna da *transcendência das integrais abelianas*. Essencialmente, a prova de Newton baseia-se na análise de uma determinada construção muito moderna (equivalente ao estudo de uma superfície de Riemann para curvas algébricas), e, portanto, isso dificultou seu entendimento.

Esses teoremas são de suma importância tendo além disso, seu valor histórico, já que *integrais abelianas* são ensinadas nos cursos iniciais de Cálculo Diferencial e Integral. Como mencionado acima, essas demonstrações ficaram incompreensíveis para os contemporâneos de Newton tanto quanto, por incrível que pareça, também para a maioria dos matemáticos do século XX, particularmente os já graduados e professores que atuam no ensino de qualquer nível, os quais foram educados no movimento internacional da Matemática Moderna, surgida na década de 1960, estruturada no formalismo e rigor dos *fundamentos da Teoria dos Conjuntos e da Álgebra das funções de variável real.* Com uma formação profissional pautada por pressupostos minimizantes (se não, preconceito), nunca foram instigados nem ao menos tiveram um pouco de curiosidade em folhear os *Principia Mathematica,* simplesmente considerado como um livro de Física para físicos.

Este artigo pretende apresentar uma transposição didática dos dois teoremas e de alguns outros. Para isso faremos uso de um conjunto de textos, em especial e com maior intensidade o estudo minucioso de Vladimir Arnold (1937- 2010), um dos maiores matemáticos do séc. XX, e V. A. Vasil'ev, que inicialmente apareceu no periódico popular de ciência editado pela Academia de Ciências da URSS e da Academia de Ciências Pedagógicas da URSS, a Kvant. (ARNOL'D; VASIL'EV, 1991; ARNOL'D; VASIL'EV,1989)

## A VERIFICAÇÃO DOS TEOREMAS DE NEWTON

### Teorema 1 (Proposição XXX – Problema 22).

*Encontrar, em qualquer tempo determinado, o lugar de um corpo que se move em uma dada parábola.*

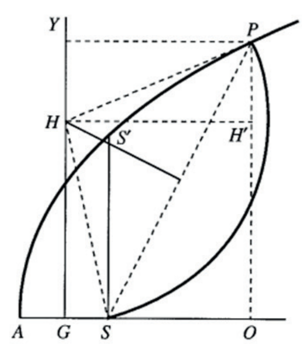


**figura 1**

Seja $S$ o foco e $A$ o vértice principal da parábola e $P$ a posição instantânea do corpo na parábola

$$y^2=4ax=4AS.x$$

Traçando uma perpendicular no ponto médio G do segmento de reta $AS \in AO$ (eixo *x*) e a normal a *SP* no seu ponto médio interceptando GY em *H*. Como o ponto *P* se move ao longo da parábola sob a ação de uma *lei que varia com o inverso do quadrado da distância* centrada em S, o ponto *H* move-se ao longo de GY com *velocidade uniforme* igual a uma fração da velocidade de P no vértice:

$$(AG)^2+(GH)^2=(GS)^2+(GH)^2=(HS)^2=(HP)^2$$

Mas

$$(HP)^2=(H'H)^2+(H'P)^2=(AO-AG)^2+(PO-GH)^2$$
$$(HP)^2=(AO)^2+(PO)^2+\underbrace{(AG)^2+(GH)^2}_{(HP)^2}-2AO.AG-2PO.GH$$

Logo

$$2PO.GH=(AO)^2+(PO)^2-2.AOAG$$

Como AO e *P*O representam na notação atual as coordenadas *x* e *y* de P, pela equação da parábola dada

$$y^2=4AS.x \Longrightarrow (PO)^2=4AS.AO \Leftrightarrow AO=\frac{(PO)^2}{4AS}$$
$$2AG=AS \Longrightarrow\ AO\underbrace{AS}_{2AG}=\frac{1}{4}(PO)^2$$
$$2.AOAG=\frac{1}{4}(PO)^2$$

Inserindo esse resultado na equação

$$2PO.GH=(AO)^2+(PO)^2-2AO.AG \Longrightarrow$$
$$2PO.GH=(AO)^2+(PO)^2-\frac{1}{4}(PO)^2 \Leftrightarrow 2GH=\frac{(AO)^2}{PO}+PO-\frac{1}{4}PO$$
$$2GH=\frac{\left(\frac{(PO)^2}{4AS}\right)^2}{PO}+PO-\frac{1}{4}PO=\frac{(PO)^2}{4AS}\frac{PO}{4AS}+PO-\frac{1}{4}PO$$
$$2GH=AO\frac{PO}{4AS}+PO-\frac{1}{4}PO=AO\frac{PO}{4AS}+\frac{3}{4}PO$$
$$2GH=AO\frac{PO}{4AS}+\frac{3}{4}PO$$

Mas isso pode ser modificado para uma forma alternativa permitindo abrir a "caixa hermética de Newton"

$$2GH=AO\frac{PO}{4AS}+\frac{3}{4}PO \Longrightarrow 2GH.AS=\frac{POAO}{4}+\frac{3}{4}PO.AS$$
$$2GH.AS=\frac{POAO}{4}+\frac{3}{4}PO.AS=\frac{PO}{4}(AO+3AS)$$
$$2GH.AS=\frac{PO}{4}(AO+3AS)$$

Ou

$$2GH = \frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}\frac{AOPO}{4AS} + PO\right) = \frac{3}{4}\left(\frac{AOPO}{3AS} + PO\right)$$

$$\frac{4}{3}GH = \frac{1}{2}\left(\frac{AOPO}{3AS} + PO\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{AOPO}{AS} + 3PO\right)$$

$$\frac{4}{3}GHAS = \frac{1}{6}(AOPO + 3POAS) = \frac{PO}{6}(AO + 3AS)$$

$$\frac{4}{3}GHAS = \frac{PO}{6}(AO + 3AS) = \frac{PO}{6}[4AO - 3(AO - AS)] = \frac{PO}{6}(4AO - 3OS)$$

$$\frac{4}{3}GHAS = \frac{PO}{6}(4.AO - 3.OS)$$

Mas $AS \equiv a$, $PO = y_P$ e $AO = x_P$ , então

$$\frac{4}{3}GHa = \frac{2}{3}POAO - \frac{POOS}{2} = \frac{2}{3}y_P x_P - A_{\Delta SOP}$$

$$\frac{4}{3}GHa = \frac{2}{3}y_P x_P - A_{\Delta SOP}$$

Modernamente

$$\int_0^{x_P} y\,dx = \int_0^{x_P} (4ax)^{\frac{1}{2}}\,dx = 2a^{\frac{1}{2}}\int_0^{x_P} (x)^{\frac{1}{2}}\,dx = \left(2a^{\frac{1}{2}}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)_0^{x_P} = \left(\frac{4}{3}\underbrace{(ax)^{\frac{1}{2}}}_{y}x\right)_0^{x_P}$$

$$\int_0^{x_P} y\,dx = \frac{4}{3}y_P x_P \equiv \frac{4}{3}GHa$$

Então a equação $\frac{4}{3}GHa = \frac{2}{3}y_P x_P - A_{\Delta SOP}$ é a área do setor parabólico *ASP*. Pela 2ª Lei de Kepler (a Lei das Áreas), a *região varrida com centro em S*,

$$\frac{4}{3}GHa = \frac{h.\Delta t}{2} = const$$

$$\frac{4}{3}GHa = \frac{h.\Delta t}{2} \Longrightarrow GH = \frac{3}{8a}h.\Delta t \Leftrightarrow \frac{GH}{\Delta t} = \frac{3}{8}\underbrace{\frac{h}{a}}_{v_P} = const$$

A velocidade *areolar* de *P* em A é

$$\frac{GH}{\Delta t} = \frac{3}{8}v_P$$

Esse é resultado apresentado no Cor.II da Prop.30. no Cor.I da Prop.30 Newton conclui que *GH* : *AS* assim como o tempo no qual o corpo descreve o arco *AP* está para o tempo no qual o corpo descreve o arco *AS*'

$$\frac{GH}{AS} = \frac{A_{ASP}}{A_{AS'P}}$$

A conclusão é dada no Cor.III da Prop. 30 (NEWTON, 2002), afirmando que é possível *ser encontrado o tempo no qual o corpo descreve qualquer arco determinado AP*, mostrando como deverá ser feita a construção geométrica.

Newton certamente conhecia a *equação polar da parábola*, é difícil imaginar que ele não tenha deduzido para si a solução para o problema dado. Newton, no entanto, preferiu a presente demonstração, pois analisa o movimento ao longo de uma parábola a partir de uma construção geométrica semelhante à que ele cria para o movimento de uma elipse.

## Teorema 2 (Lema XXVIII).

*Não há figura oval cuja área, arbitrariamente destacada por linhas retas, possa ser universalmente encontrada por meio de equações de qualquer número finito de termos e dimensões.*

Simplificadamente, em linguagem matemática moderna, Newton essencialmente provou o seguinte (NEWTON, 1999 ou NEWTON, 2002):

*Não existe curva convexa suave (infinitamente diferenciável) tal que a área dividida por uma reta* $ax + by = c$ *seja uma função algébrica de a, b, e c.*

Uma curva plana é denominada *algébrica* (Newton denomina *geometricamente racional*) se ela satisfaz a equação $P(x, y) = 0$, onde $P$ é um polinômio não nulo. Por exemplo, a circunferência dada pela equação $x^2 + y^2 = 1$ é uma curva algébrica. Algumas curvas algébricas são as cônicas (Apolônio): elipses, hipérboles, parábolas e curvas *singulares* como a lemniscata da forma

$$y^2 = x^{(m.(n-1))} (a^2 - x^2)$$

Não confundir aqui com a *lemniscata de Bernoulli*. Um caso especial é a *lemniscata de Huygens*

$$y^2 = x^2 (a^2 - x^2)$$

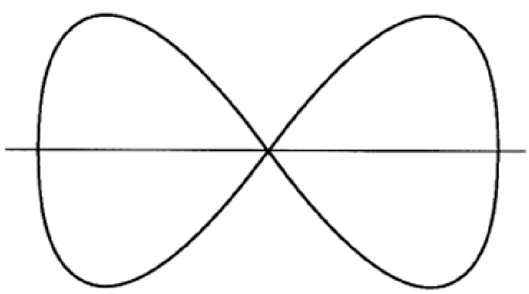

**figura 2**

Uma função é *algébrica* se sua representação gráfica é uma *curva algébrica*.

Newton no Lema trata de uma figura *oval*, ou seja, uma *curva convexa plana*, algebricamente integrável

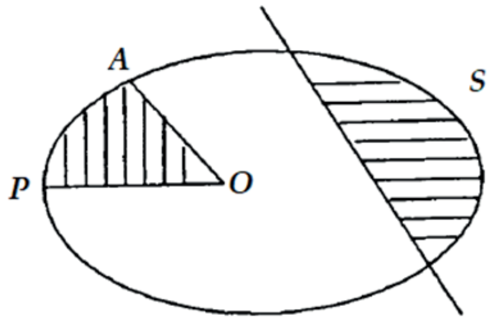


figura 3

Se a área da região *S* é cortada por uma reta de equação $ax + by = c$, é da forma

$P\ (S,a,b,c) = 0$, onde *P* é um polinômio não nulo. A área do setor curvilíneo *OPA* é uma *função algébrica* dos segmentos de reta OA e *OP* que definem o setor. O Lema estabelece um Teorema

## Teorema 3

*Toda oval algebricamente integrável tem pontos singulares: todas as ovais suaves são algebricamente não - integráveis.*

Demonstração:

Seja *SP* o *raio vetor* girando continuamente ao redor de *S* com uma velocidade *angular constante* $\omega$ enquanto *R* aumenta continuamente com a *área varrida A(t)*, Prop. 30, ou seja *R* = *A(t)*. Se *R* aumenta pela área do *oval* a cada revolução

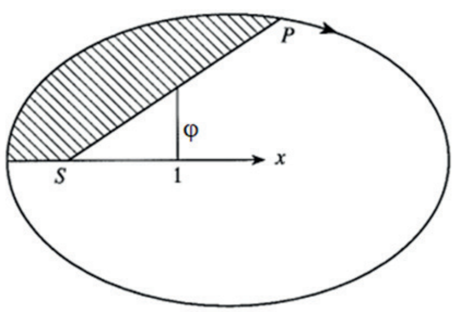


figura 4

$$\frac{dA}{dt} = const = \frac{1}{2}h \Longrightarrow R = \frac{1}{2}ht \Leftrightarrow \varphi = \omega t$$

Em qualquer evento, um corpo descrevendo um oval irá ocupar a mesma posição P para uma dada direção do *raio vetor* $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ por uma *infinidade de vezes*, em intervalos do período orbital. Toda essa infinidade de vezes não pode ser obtida a partir das *raízes de uma equação algébrica* de grau finito. Portanto, pelos mesmos argumentos o *comprimento de arco de um oval* não é algébrico.

O Teorema pode ser demonstrado de outra maneira.

Seja *SP* o *raio vetor*, de origem em *S* e extremidade em *P* pertencente ao *perímetro do oval* o qual está em movimento de rotação. Se a oval é algebricamente integrável[1] , então a área varrida por *SP* deve ser uma função algébrica da tangente do ângulo de inclinação $\varphi$ em relação ao eixo *x*. Se for permitido que *SP* gire ao redor de *S* para infinitas rotações, a área oval varrida por *SP* aumenta uma vez a cada revolução.

Consequentemente, a área varrida, é uma função com valores múltiplos de $\varphi$, possuindo infinitos valores diferentes para a mesma posição de *P*. Mas uma *função algébrica* não pode ter valores múltiplos, uma vez que o número de raízes de um polinômio diferente de zero não pode exceder seu grau. Portanto, a área varrida não é uma *função algébrica* logo a *oval não é algebricamente integrável.*

## ALGEBRICIDADE LOCAL E GLOBAL.

Newton observa que um argumento semelhante prova que o comprimento do *arco de um oval algébrico suave* também *não é algébrico*. Erroneamente somos levados a concluir que que *ovais algebricamente quadráticas* não existem; mas o próprio Newton conhecia exemplos de segmentos *ovais* cuja área é algébrica e mencionou alguns exemplos em relação ao seu teorema nos *Principia*. Um exemplo simples é fornecido pelo oval na figura de equação $y^2 = x^2 - x^3$.

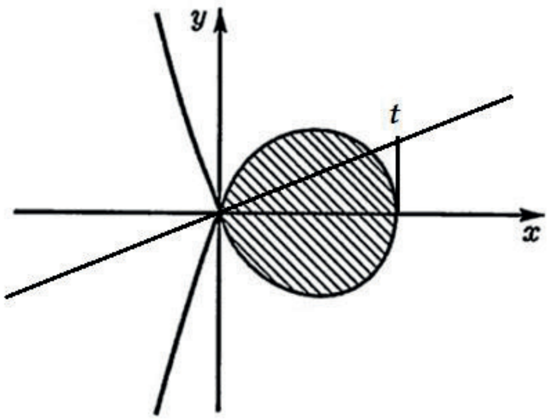


**figura 5**

Podemos encontrar equações paramétricas dessa curva da seguinte forma. Considerando a reta de equação $y = t.x$, que como sabemos, passa na origem do sistema de coordenadas. Ela encontra a *oval* no ponto *P* que satisfaz

$$y = tx \Longrightarrow y^2 = x^2 - x^3$$
$$(tx)^2 = x^2 - x^3 \Leftrightarrow t^2x^2 - x^2(1 - x) = 0$$
$$x^2(t^2 - 1 + x) = 0 \Longrightarrow t^2 - 1 + x = 0 \therefore x_P = 1 - t^2 \ ; \ y_P = t - t^3$$

Portanto

$$\begin{cases} x_P = 1 - t^2 \\ y_P = t - t^3 \end{cases}$$

A partir dessa representação paramétrica é possível inferir que a área dada por

$$A = \int_0^{x_P} y\,dx$$

Essa área é um *polinômio em t.*

$$y^2 = x^2 - x^3 = x^2(1-x) \Longrightarrow y = x\sqrt{(1-x)}$$

$$A = \int_0^{x_P} y\,dx = \int_0^{x_P} x\sqrt{(1-x)}\,dx \begin{cases} x = 1 - t \Leftrightarrow t = 1 - x \\ dx = -dt \end{cases}$$

A área

$$A = \int_0^{x_P} (1-t).\sqrt{t}\,dt \equiv -\int_{x_P}^{0} (1-t).\sqrt{t}\,dt \Leftrightarrow A = \int_0^{x_P} (1-t).\sqrt{t}\,dt$$

$$A = \left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\right)_0^{x_P} \therefore \left(\frac{2}{3}x_P^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}x_P^{\frac{5}{2}}\right)$$

Portanto uma região arbitrária definida pela intersecção da reta em dois pontos do *oval*, é *algébrica*, ou seja, a *oval* em questão é algebricamente quadrática.

Embora essa *oval* não seja suave, o argumento de Newton se aplica. Mostra que a área varrida pelo *raio vetor* não pode ser expressa por uma *função algébrica* única. Não há contradição; pois a solução, neste caso, é que toda vez que o *vetor raio* passa pelo ponto singular (*nó da oval*), o valor da área expressa por certas funções algébricas muda com um salto para outras funções algébricas. A fig.5 representa um oval algebricamente quadrática localmente. Como é conhecido, sabemos que uma *oval algébrica localmente quadrática* pode ter uma suavidade arbitrariamente grande, mas finita, isto é, pode ser representada em toda parte por funções com qualquer número prescrito de derivadas.

Na prática a integrabilidade algébrica local é quase tão genuína quanto a integrabilidade algébrica global. Portanto, pela própria apresentação da demonstração, Isaac naturalmente estava se perguntando se um oval algebricamente suave, seria localmente integrável. Em outras palavras, poderia a área S definida por um segmento de corte *ax+by =c* se uma função algébrica de (*a, b, c*) nas vizinhanças de todo ponto?

Usando o método desenvolvido para a fig.5, uma *oval* algebricamente integrável, com a tangente definida em todos os pontos, é suficiente para escolher um par adequado de polinômios. Considerando o oval da fig.6, uma curva contínua dada pelos polinômios dados por

$$\begin{cases} x = (t^2 - 1)^2 \\ y = t^3 - t \end{cases}$$

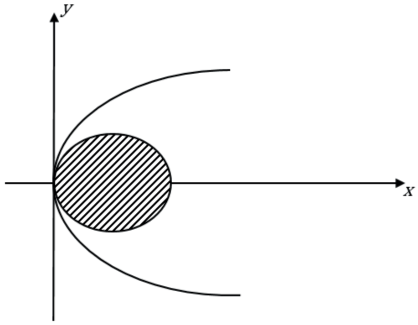


**figura 6**

Obtemos um *oval* que parece uma curva completamente suave, isto é, algebricamente integrável localmente cuja integrabilidade global é excluída pelo argumento newtoniano. (ARNOL'D, 1990)

## TEOREMA DE NEWTON SOBRE A NÃO-ALGEBRICIDADE LOCAL.

Um *oval* integrável algebricamente pode ser arbitrariamente grande e suavidade finita, ou seja, pode ser definido em toda parte por funções com muitas derivadas arbitrariamente. Contudo existem casos em que existe um ponto singular da *oval* onde a derivada de alguma ordem é descontínua. Newton considerou curvas verdadeiramente suaves somente aquelas em que na vizinhança de todo ponto do gráfico a função pode ser expandida em uma série convergente

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \ldots$$

Tais curvas como sabemos são denominadas analíticas.

### Teorema 4.

*Nenhum oval analítico é integrável algebricamente, mesmo localmente.*

Se uma *oval* fosse localmente integrável algebricamente, mas não globalmente, então a área varrida seria expressa por uma função algébrica na vizinhança de algum ponto e na vizinhança oposta, expressa por outra função algébrica. Mas para a *oval analítico* a área varrida depende analiticamente da direção e sentido do raio vetor. Portanto ambas as funções algébricas podem se expandidas na vizinhança de um ponto dessa *oval analítica*, nas mesmas séries de potencias convergentes. Ambas essas funções algébricas seriam coincidentes nas vizinhanças do ponto em questão. Então, elas seriam sempre coincidentes. Dessa forma, se um oval analítico localmente integrável existe, seria globalmente integrável algebricamente, o que é impossível, pois uma *oval analítica* não pode ser localmente integrável algebricamente (Teorema 3).

## ANALITICIDADE DE CURVAS ALGÉBRICAS SUAVES.

Uma curva é dita *suave infinitamente* se ela representa graficamente uma função que é diferenciável muitas vezes. (ARNOL'D; VASIL'EV, 1989)

### Teorema 5.

*Uma curva algébrica suave infinitamente é analítica.*

Como Newton foi capaz de descrever a equação de qualquer ramo de uma curva algébrica na vizinhança de qualquer ponto, como uma serie de convergência rápida da forma

$$y = \ a_0 + a_1 x^{\frac{1}{n}} + a_2 x^{\frac{2}{n}} + a_3 x^{\frac{3}{n}} + \cdots, n \in \mathbb{Z}^+$$

Newton estabeleceu o Teorema sobre convergência de séries: *Quanto mais este resultado for desenvolvido para valores de x pequenos, maior será a aproximação para o valor verdadeiro de y, então a diferença entre esse valor e o valor exato de y* será eventualmente menor do que qualquer quantidade (WHITESIDE, 1968). As séries construídas são decorrentes do método desenvolvido para a *Regra do Paralelogramo* de Newton (Corolário I da Lei III do Movimento nos *Principia*).

Assim para uma *curva algébrica infinitamente suave* existem apenas termos de expoentes inteiros na expansão, o que significa que a *curva é analítica*.

## Corolário 1.

*Nenhuma oval algébrica infinitamente suave é integrável algebricamente, mesmo localmente.*

Significa que uma curva fechada convexa infinitamente suave não pode ser mesmo localmente integrável algebricamente se ela for algébrica. Por outro lado, uma *oval não algebricamente suave* não é integrável.

## Teorema 6.

*Qualquer oval algebricamente integrável localmente é algébrico.*

Newton aparentemente considera esse fato como obvio, mas faz uma pequena consideração (provavelmente para aqueles que são matematicamente limitados):

### Lema

*A envoltória de qualquer família algébrica de curvas é algébrica.*

Significa que se um conjunto de *tangentes a curva* satisfaz uma equação algébrica, então toda a curva em si mesma é algébrica. Nesse caso, considerando duas retas tangentes vizinhas tais que o coeficiente angular de suas inclinações em relação ao eixo $x$ são $m$ e $m+h$. Os pontos de intersecção descrevem uma curva algébrica $m$ variando com $h$ fixo.

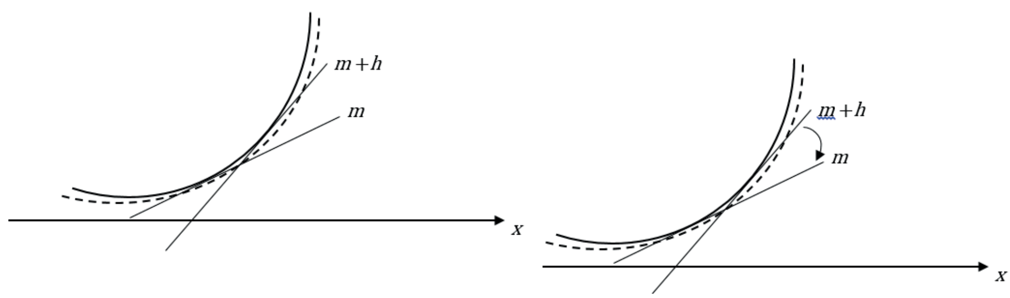


**figura 7**

O grau dessa curva é definido pelo grau do polinômio, limitado por uma constante independente de $h$. Isso é consequência do fato de que a condição de compatibilidade de duas equações algébricas é expressa a anulação do polinômio em seus coeficientes; um fato explicado por Newton em duas páginas (NEWTON, 2002 e NEWTON, 1999), que duas curvas algébricas com graus $m$ e $n$ se interceptam em mn pontos. Como $h$ tende a zero, as tangentes vizinhas nos pontos de intersecção tendem a aproximação, logo, tendem a curva original. Então desde que ela é o limite das curvas algébricas de grau limitado, a curva original também é algébrica.

Então o Teorema 6 fica provado, pois tangentes $ax+by = 0$ de uma *oval algebricamente integrável* localmente satisfaz a equação algébrica $P(a, b, c) = 0$, portanto pelo Lema a oval é algébrica.

Newton observou também que, para garantir a não integrabilidade algébrica local, é suficiente exigir que os ramos conjugados de uma curva que tendem para o infinito, não se aproximem dos pontos de uma curva fechada. Ele obviamente tinha em mente exemplos como os das fig 5 e 6, onde existem tais ramos conjugados. De fato, as palavras *tender ao infinito* não estão muito corretas pois o que é necessário é exigir que exista *auto –intersecções*. (ARNOL'D, 1990) Uma condição suficiente para uma curva fechada satisfazer uma equação $P(x, y) = 0$ e não ter auto- intersecção é o fato de que o polinômio $P$ deve se anular exatamente em dois pontos de um círculo com centro em qualquer ponto da curva, se o raio do círculo for suficientemente pequeno.

Assim a *área total limitada pela auto- intersecção de uma curva algebricamente integrável localmente é nula*. Como exemplo, a *lemniscata* é *algebricamente integrável* somente porque seus dois *loops* oferecem contribuições opostas para a área total. Se nós deformarmos a *lemniscata* de modo tal que os valores absolutos das áreas dos *loops* sejam desiguais, então perde a propriedade de ser localmente integrável algebricamente. (ARNOL'D, 1989)

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os teoremas newtonianos podem ser generalizados para as hipersuperfícies num mesmo espaço dimensional. Num espaço dimensional *impar* o problema se torna mais complicado. Por exemplo, no caso 3-dim, o valor de um segmento esférico dependerá algebricamente da secção plana de corte (o que caracteriza o Teorema de Arquimedes).

A *prova esquecida* de Newton sobre a *não integrabilidade algébrica de ovais* representa a primeira *prova de impossibilidade* na Matemática da nova era, o protótipo das futuras provas de insolubilidade de equações algébricas através de transformações algébricas dos radicais (Niels H. Abel).

Em comparação hoje aos comentários de seus sucessores, impressiona a modernidade de Newton em seu trabalho original, mais compreensível e mais rico em ideias do que as traduções devido aos comunicadores de suas considerações geométricas na linguagem formal do Cálculo de Leibniz e Cauchy.

## REFERÊNCIAS

ARNOL'D, V. I.; VASIL'EV, V. A. Newton's Principia read 300 years later. *Current Science*, v. 61, n. 2, 1991.

ARNOL'D, V. I.. *Huygens and Barrow, Newton and Hooke*: Pioneers in mathematical analysis and catastrophe theory from evolvents to quasicrystals. Translated from russiam by J. F. Primrose. Berlin: Birkhäuser Verlag, 1990.

ARNOL'D, V. I.; VASIL'EV, V. A.. Newton's Principia read 300 years later. *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 36 , nº 9, p.1148, November 1989.

HERIVEL, J.. *The Background to Newton's "Principia"*. Oxford: Claredon Press, 1965.

NEWTON, I.. *Mathematical Principles of Natural Philosophy* (3rd. edition. Translated by I. Bernard Cohen and Anne Whitman, with the assistance of Julia Budenz. Berkeley (USA): University of California Press, 1999.

NEWTON, I.. Mathematical Principles of Natural Philosophy. Translated by Andrew Motte, revised by Florian Cajori. Great Books of the Western World. 1729.

NEWTON, I.. *Principia: Principios matemáticos de Filosofia Natural* I, 3. ed.. Traduzido da edição em inglês de 1729, por Trieste Ricci, Leonardo Gregory Brunet, Sonia Terezinha Gehring e Maria Helena C. Célia, São Paulo: Edusp, 2002.

WHITESIDE, D. T.. *The Mathematical Papers of Isaac Newton*. Vol. 6, 1684-1691. Cambridge: Cambridge University Press, 1974.

WHITESIDE, D. T.. *The Mathematical Papers of Isaac Newton.* Vol.2, 1667-1670. Cambridge: Cambridge University Press, 1968.

## BIBLIOGRAFIA

AMADO, A. T. F. O método das primeiras e últimas razões ou o conceito de limite nos Principia de Newton. In: *Elementos de Matemática*, cap. 3, p.59. Santos (SP): Leopoldianum, 2005.

BARON, M. E. The Origins of the Infinitesimal Calculus. New York: Pergamon Press, 1969.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. Tradução Elza Gomide. São Paulo: Edgard Blucher 1974.

CHANDRASEKHAR, Subrahmanyan. *Newton's Principia for the common reader*. Oxford: Oxford University Press, 2002.

HILBERT, D.; COHN-VOSSEN, S.. *Geometry and the Imagination*. New York: American Mathematical Soc- Chelsea Pu., 1999.

LEHMANN, C. H.. *Geometría Analítica*. Traduccion Rafael Garcia Diaz, Ing. México: Limusa, 1962.

NEWTON, I.. Principia; Principios matemáticos de Filosofia Natural II e III, 3.. ed. Traduzido da edição em inglês de 1729, por André Koch Torres Assis. São Paulo: Edusp, 2008.

SPIVAK, M.. *Physics for Mathematicians*: Mechanics I. Houston: Publish or Perish Inc, 2010.

WESTFALL, R. S.. *A biografia de Isaac Newton*. Tradução de Vera Ribeiro. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1995.

WESTFALL, R. S.. *Force in Newton's physics*: the science of dynamics in the seventeenth century. New York: American Elsevier Pu. Co. Inc., 1971.

WESTFALL, R. S.. *Never at Rest, a biography of Isaac Newton* (8th reiprinted of first paperback edition). New York: Cambridge University Press, 1996

WHITESIDE, Derek Thomas. The pre-history of the PRINCIPIA from 1664 to 1666, Notes Rec. R. Soc. London, vol 45, p. 11-61, 1991.

### ABSTRACT

Analyzing Kepler's law in two dimensions, Newton discovered an astonishingly modern topological proof of the transcendence of Abelian integrals. In our paper we describe the two Newton's theorem and also some other mathematical theorems (more or less explicitly) contained in the *Principia Mathematica* and partially suggested by Newton.

### KEYWORDS

Oval, smooth curves algebraically integrable and algebraically non - integrable.

## NOTAS

[1] Funções associadas com ovais algébricos são chamadas de integrais abelianas